Points de référence en décision multicritère

J.F.R.O.

Antoine ROLLAND
LIP6

15 décembre 2006

Présentation

- Un contexte : la décision multicritère, l’agrégation de préférences
- Une problématique: la présence d’un point de référence dans les procédures d’agrégation ordinale
- Deux résultat : règles de décision basées sur l’utilisation de plusieurs points de référence

Décision multicritère Agrégation de préférences

- Soit un espace X d'alternatives
- Chaque alternative est décrite par *n* critères:
- Il existe *n* préordres $\succsim_j$ les espaces des critères

⇒ Objectif : l'agrégation des préférences

Obtention la relation de préférence globale (sur les alternatives) par agrégation des relations de préférence partielles (sur les critères).

Approches

Deux approches possibles en multicritère:

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{matrix} & \xrightarrow{a} & a(x), a(y) \\
\downarrow C & & \downarrow c \\
C(x_1, y_1), \ldots, C(x_n, y_n) & \xrightarrow{A} & P(x, y)
\end{array}
$$

- « agréger puis comparer »

$$\boxed{P(x,y) = c(a(x_1, \ldots, x_n), a(y_1, \ldots, y_n))}$$

- « comparer puis agréger »

$$\boxed{P(x,y) = A(C(x_1,y_1), \ldots, C(x_n,y_n))}$$

Approches

- « agréger puis comparer » (e.g. Keeney Raifa 76)
  - Avantage: simplicité opératoire (obtention d'un ordre complet sur les alternatives)
  - Inconvénient : nécessite beaucoup d'information (utilités cardinales, taux de substitutions des critères...)
- « comparer puis agréger » (e.g. Roy 68 etc)
  - Avantage: adapté si l'information sur les critères est imprécise, incomplète, ordinale
  - Inconvénient: difficulté de l'agrégation ordinale (Théorème d'Arrow), intransitivité...

Limites

Limites descriptives (Dubois *et al* 03) :

certaines préférence ne peuvent être décrites à l'aide de règles ordinale

Limites prescriptives (théorème d'Arrow 51)

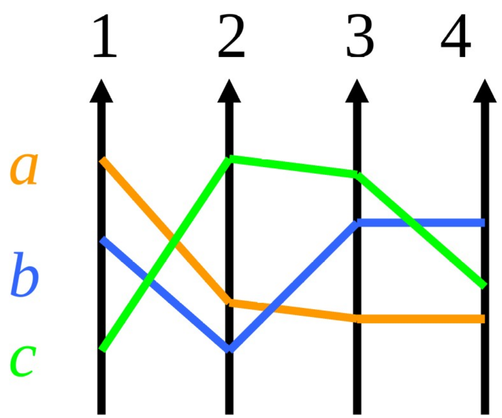
La contrepartie en décision multicritère du théorème d'Arrow implique d'avoir un critère dictateur pour avoir des préférences transitives

Règle de concordance : exemple

Règle de concordance généralisée : $\boxed{a \succsim b \iff C(a,b) \succsim_N C(b,a)}$

Avec $C(a,b) = \{j, a_j \succsim_j b_j\}$

Et $\succsim_N$ une relation d'importance sur les coalitions de critères



- C(a,b)={1,2}
  C(b,a)={3,4}

a $\succ$ b ⇔ {1,2} $\succ_N$ {3,4}

- C(b,c)={1,4}
  C(c,b)={2,3}

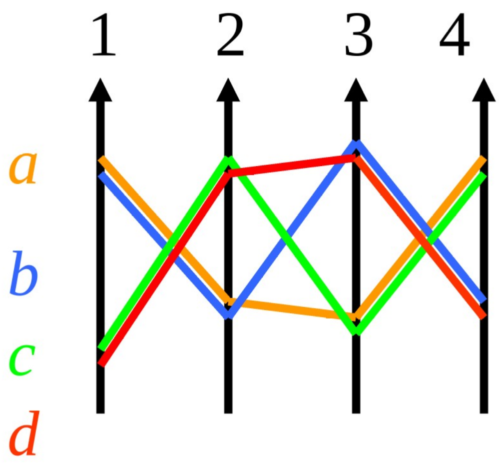
b $\succ$ c ⇔ {1,4} $\succ_N$ {2,3}

- C(a,c)={1}
  C(c,a)={2,3,4}

c $\succ$ a ⇔ {2,3,4} $\succ_N$ {1}

Règles de concordance : limites

Supposons que les préférences du décideur soient : $a \succ b$, $d \succ c$



- C(a,b)={1,2,4}

  C(b,a)={1,2,3}

a $\succ$ b ⇒ {1,2,4} $\succ_N$ {1,2,3}

- C(c,d)={1,2,4}

  C(d,c)={1,2,3}

d $\succ$ c ⇒ {1,2,3} $\succ_N$ {1,2,4}

Les préférences variant avec la valeur sur un critère ne sont pas représentables par une règle de concordance

Points de référence

Il s’agit de proposer des procédures où les alternatives sont comparées par l’intermédiaire d’un point tiers spécifique (point de référence)

L’introduction de points de référence a été établie en psychologie et sociologie (Tversky Kahneman 91), en théorie du choix social (Campbell Kelly 00), en tri multicritère (Roy Yu 92)

Objectif : obtenir une procédure d’agrégation

- non dictatoriale, unanime, universelle
- induisant des préférences transitives
- respectant l’indépendance vis-à-vis des alternatives tierces

Règle de décision avec points de référence

- En notant $X_i = \{j, x_j \succsim_j p_j^i\}$

La relation de préférence suit le modèle basé sur l'utilisation de points de référence si il existe une relation $\succsim'$:

$$x \succsim y \iff (X_1, \ldots, X_m) \succsim' (Y_1, \ldots, Y_m)$$

- Cela est vrai si l'axiome d'indépendance conditionnelle (ICP) suivant est vérifié :

$$\begin{bmatrix} (X_1, \ldots, X_m) = (Z_1, \ldots, Z_m) \\ (Y_1, \ldots, Y_m) = (W_1, \ldots, W_m) \end{bmatrix} \Rightarrow x \succsim y \iff z \succsim w$$

Problématique

Il y a déplacement de la problématique :

- Les alternatives sont décrites par les ensembles $X_1,\dots,X_m$.

- les deux approches CA et AC sont possibles à partir des ensembles $X_1,\dots,X_m$

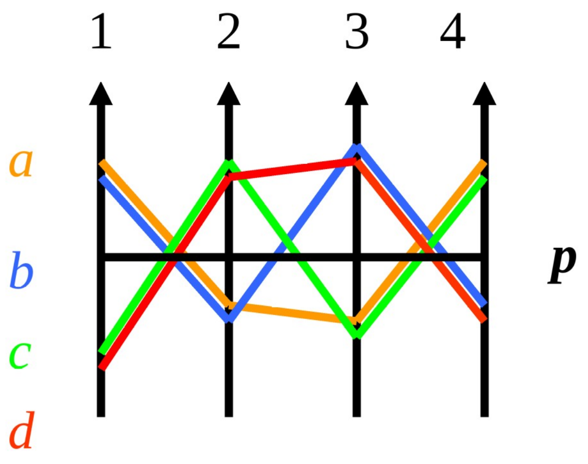
Exemple

Règle de concordance avec points de référence :

$$a \succsim b \iff A_p \succsim_N B_p$$

Avec $A_p = C(a,p) = \{j, a_j \succsim_j p_j\}$

Et $\succsim_N$ une relation d'importance sur les coalitions de critères



- $A_p=\{1,4\}$

  $B_p=\{1,3\}$

a $\succ$ b ⇒ $\{1,4\} \succ_N \{1,3\}$

- $C_p=\{2,4\}$

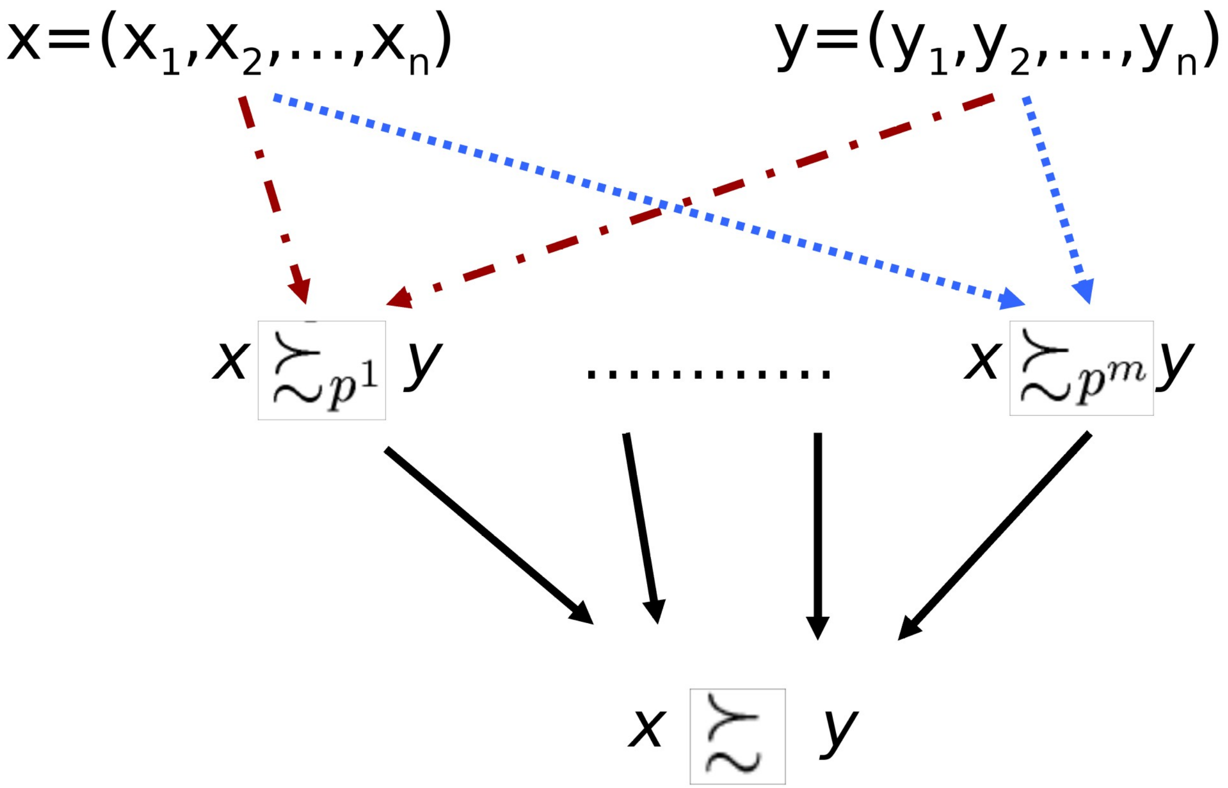
  $D_p=\{2,3\}$

d $\succ$ c ⇒ $\{2,3\} \succ_N \{2,4\}$

Ces préférences sont représentables avec un point de référence

Règle de concordance avec points de référence

Points de référence: Approche CA



Axiomes (1)

Axiome SEP : Séparabilité par rapport aux points de référence :

$$\begin{bmatrix} X_p = Z_p \; X_{p'} = Y_{p'} \;\; \forall p' \neq p \\ Y_p = W_p \; Z_{p'} = W_{p'} \; \forall p' \neq p \end{bmatrix} \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Si la relation de préférence vérifie SEP, on peut déduire des relations de préférence par rapport aux points de référence

$$X_p \succsim'_p Y_p \iff x \succsim_p y$$

Axiomes (2)

Axiome ICRI : indépendance conditionnelle sur les relations induites

$$\left[\forall p \in \mathcal{P}, \begin{array}{c} x \succsim_p y \iff z \succsim_p w \\ y \succsim_p x \iff w \succsim_p z \end{array}\right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Théorème : si la relation de préférence vérifie SEP et ICRI, alors il existe une relation de préférence sur les sous-ensemble de P telle que :

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid X_p \succsim'_p Y_p\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid Y_p \succsim'_p X_p\}$$

Lexicographie

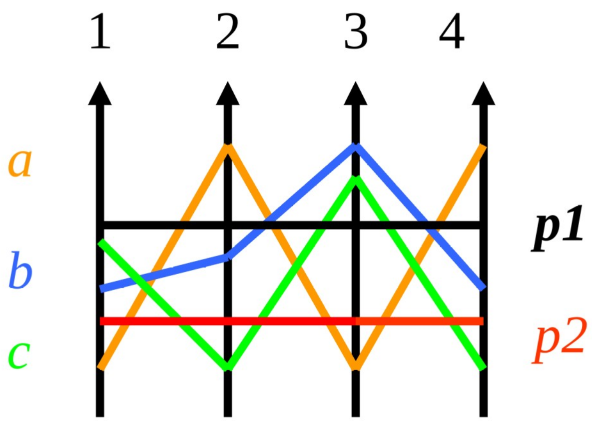
Théorème *Si la relation de préférence* $\succsim$ *sur* $\mathcal{X}$

1. *satisfait l'axiome SEP*
2. *satisfait l'axiome ICRI*
3. *est un pré-ordre total satisfaisant la monotonie sur les critères* $(z_j \succsim_j x_j \Rightarrow [x \succsim y \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succsim y])$
4. *et si* $\mathcal{P}$ *possède au moins trois éléments*

alors il existe un ordre $\{1, \ldots, m\}$, *et* m *relations de préférence induites* $\succsim'_p$ *sur les sous-ensembles de* $\mathcal{P}$ *tel que*

$$
\begin{array}{lcl}
x \succ y & \Longleftrightarrow & X_1 \succ'_{p^1} Y_1 \\
 & ou & X_1 \sim'_{p^1} Y_1 \text{ et } X_2 \succ'_{p^2} Y_2 \\
 & \ldots & \\
 & ou & \forall i \neq m,\ X_i \sim'_{p^i} Y_i \text{ et } X_m \succ'_{p^m} Y_m \\
x \sim y & & sinon
\end{array}
$$

Lexicographie : exemple



$$\begin{cases} A_{p^1} = \{2,4\} & A_{p^2} = \{2,4\} \\ B_{p^1} = \{3\} & B_{p^2} = \{1,2,3,4\} \\ C_{p^1} = \{3\} & C_{p^2} = \{1,3\} \end{cases}$$

$$a \succ_{p^1} b \Rightarrow a \succ b$$
$$a \succ_{p^1} c \Rightarrow a \succ c$$

$$b \sim_{p^1} c \Rightarrow ?$$
$$b \succ_{p^2} c \Rightarrow b \succ c$$

M-capacités avec points de référence

Points de référence : approche AC

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $\qquad$ $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

$\ldots X_i=C(x,p_i)\ldots$ $\qquad$ $\ldots\ Y_i=C(y,p_i)\ \ldots$

$F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ $\qquad$ $F(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$

$$x \succsim y$$

M-capacité (1)

Définition :

Soit : $\mathcal{Q}(N) = \{(A_1, \ldots, A_k) \in 2^N \times \ldots \times 2^N \mid A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j\}$

On dit que $\nu \; : \; \mathcal{Q}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ est une m-capacité si :

1) $\nu(\emptyset, \ldots, \emptyset) = 0$

2) $\exists l \in \{1, \ldots, k-1\} \; tel \; que \; \forall i \leq l, \; \forall j > l,$

$A_i \subseteq C_i \; et \; B_j \supseteq D_j$ $\Rightarrow$ $\nu(., A_i, .., B_j, .) \leq \nu(., C_i, .., D_j, .)$

M-capacité (2)

Soient $p^1,\ldots,p^m$ les points de référence tels que

$p^k_j <_j p^{k+1}_j$ pour tout critère j

On pose $X_i=\{j \in N \mid x_j \succsim_j p^i_j\}$

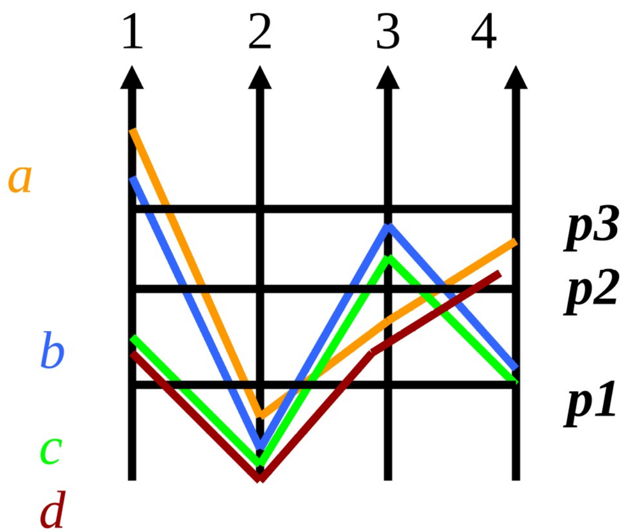
On pose $X_i^* = X_i - X_{i-1}$ pour i>1 et $X_1^* = X_1$

Théorème

Si $\succsim$ est un préordre vérifiant ICP et l'unanimité faible, il existe une m-capacité ν telle que :

$$x \succsim y \iff \nu(X_m^*,\ldots,X_2^*,\overline{X_1^*}) \geq \nu(Y_m^*,\ldots,Y_2^*,\overline{X_1^*})$$

M-capacité : exemple



Pour a : $A_1=\{1,3,4\}$ $A_2=\{1,4\}$ $A_3=\{1\}$

$A_1^*=\{3\}$ $A_2^*=\{4\}$ $A_3^*=\{1\}$

Pour b : $B_1=\{1,3,4\}$, $B_2=\{1,3\}$ $B_3=\{1\}$

$B_1^*=\{4\}$ $B_2^*=\{3\}$ $B_3^*=\{1\}$

Pour c : $C_1=\{1,3,4\}$ $C_2=\{3\}$ $C_3=\emptyset$

$C_1^*=\{1,4\}$ $C_2^*=\{3\}$ $C_3^*=\emptyset$

Pour d : $D_1=\{1,3,4\}$, $D_2=\{4\}$ $D_3=\emptyset$

$D_1^*=\{1,4\}$ $D_2^*=\{4\}$ $D_3^*=\emptyset$

$a \succsim b$ $v(\{1\},\{4\},\{2\})>v(\{1\},\{3\},\{2\})$

$c \succsim d$ $v(\emptyset,\{3\},\{2\})>v(\emptyset,\{4\},\{2\})$

Conclusion

L’introduction de points de référence dans les modèles d’agrégation ordinale

- permet de proposer de nouvelles règles de décision ordinales permettant d’obtenir des relations de préférence transitives et non dictatoriales
- Offre une interprétation des k-capacités en terme de niveaux de référence.