Représentation de préférences à l'aide de l'intégrale de Choquet

Ivan Kojadinovic

LINA CNRS FRE 2729
École polytechnique de l'université de Nantes

15 décembre 2006

Plan de cette présentation

Intégrales non additives

- Le concept d'**intégrale par rapport à une mesure** a été étendu aux mesures non additives (voir p. ex. Denneberg 2000).
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont l'**intégrale de Choquet** et l'**intégrale de Sugeno (1974)**.
- Dans un contexte discret, ces intégrales généralisées peuvent être vues comme des **opérateurs d'agrégation** particulièrement flexibles (Grabisch 1992, Marichal 2000).
- L'intégrale de Choquet est une intégrale par rapport à une **capacité**.

Intégrales non additives

- Le concept d'**intégrale par rapport à une mesure** a été étendu aux mesures non additives (voir p. ex. Denneberg 2000).
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont l'**intégrale de Choquet** et l'**intégrale de Sugeno (1974)**.
- Dans un contexte discret, ces intégrales généralisées peuvent être vues comme des **opérateurs d'agrégation** particulièrement flexibles (Grabisch 1992, Marichal 2000).
- L'intégrale de Choquet est une intégrale par rapport à une **capacité**.

Intégrales non additives

- Le concept d'**intégrale par rapport à une mesure** a été étendu aux mesures non additives (voir p. ex. Denneberg 2000).
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont l'**intégrale de Choquet** et l'**intégrale de Sugeno (1974)**.
- Dans un contexte discret, ces intégrales généralisées peuvent être vues comme des **opérateurs d'agrégation** particulièrement flexibles (Grabisch 1992, Marichal 2000).
- L'intégrale de Choquet est une intégrale par rapport à une **capacité**.

Intégrales non additives

- Le concept d'**intégrale par rapport à une mesure** a été étendu aux mesures non additives (voir p. ex. Denneberg 2000).
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont l'**intégrale de Choquet** et l'**intégrale de Sugeno (1974)**.
- Dans un contexte discret, ces intégrales généralisées peuvent être vues comme des **opérateurs d'agrégation** particulièrement flexibles (Grabisch 1992, Marichal 2000).
- L'intégrale de Choquet est une intégrale par rapport à une **capacité**.

Plan

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \dots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \ldots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \ldots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \ldots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \ldots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités

Dans la suite, $N := \{1, \dots, n\}$ désigne un **ensemble de critères**.

Capacité (Choquet 1953)

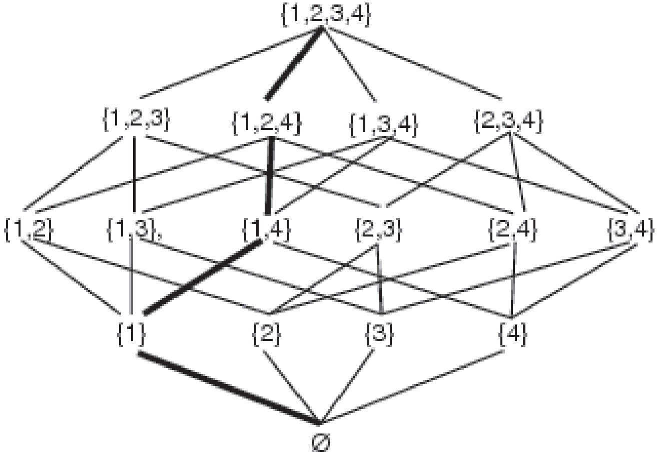
Une fonction $\mu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ est une **capacité** sur N si

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(N) = 1$,
- pour tout $S, T \subseteq N$, $S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$.

Dans le contexte de l'agrégation, $\mu(S)$ peut être vu comme le **poids** ou l'**importance** du sous-ensemble $S \subseteq N$ de critères dans la décision.

La notion de **capacité** généralise la notion de **vecteur de poids**.

Capacités



L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

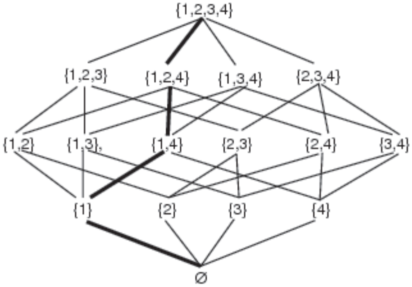
Définition

L'**intégrale de Choquet discrète** de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par rapport à une capacité μ sur N est définie par

$$C_\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}[\mu(A_{\sigma(i)}) - \mu(A_{\sigma(i+1)})],$$

où σ est une permutation sur N telle que $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$, $A_{\sigma(i)} := \{\sigma(i), \ldots, \sigma(n)\}$, pour tout $i \in N$, et $A_{\sigma(n+1)} := \emptyset$.

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation



Exemple : $n = 4$. Si $x_3 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_1$, nous avons

$$C_\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\,[\mu(3,2,4,1) - \mu(2,4,1)] + x_2\,[\mu(2,4,1) - \mu(4,1)] + x_4\,[\mu(4,1) - \mu(1)] + x_1\,[\mu(1) - \mu(\emptyset)].$$

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

- En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet satisfait des **propriétés particulièrement remarquables** (voir p. ex. Grabisch 1997**a**, Marichal 2000) et a pour cas particulier :
  - la moyenne arithmétique pondérée (capacité **additive**) ;
  - les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité **cardinale**) ;
  - les polynômes laticiels (capacité **binaire**).
- **Caractérisée axiomatiquement** en tant qu'opérateur d'agrégation par Marichal (2000).

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

- En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet satisfait des **propriétés particulièrement remarquables** (voir p. ex. Grabisch 1997**a**, Marichal 2000) et a pour cas particulier :
  - la moyenne arithmétique pondérée (capacité **additive**) ;
  - les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité **cardinale**) ;
  - les polynômes laticiels (capacité **binaire**).
- **Caractérisée axiomatiquement** en tant qu'opérateur d'agrégation par Marichal (2000).

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

- En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet satisfait des **propriétés particulièrement remarquables** (voir p. ex. Grabisch 1997**a**, Marichal 2000) et a pour cas particulier :
  - la moyenne arithmétique pondérée (capacité **additive**) ;
  - les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité **cardinale**) ;
  - les polynômes laticiels (capacité **binaire**).
- **Caractérisée axiomatiquement** en tant qu'opérateur d'agrégation par Marichal (2000).

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

- En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet satisfait des **propriétés particulièrement remarquables** (voir p. ex. Grabisch 1997**a**, Marichal 2000) et a pour cas particulier :
  - la moyenne arithmétique pondérée (capacité **additive**) ;
  - les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité **cardinale**) ;
  - les polynômes laticiels (capacité **binaire**).
- **Caractérisée axiomatiquement** en tant qu'opérateur d'agrégation par Marichal (2000).

L'intégrale de Choquet en tant qu'opérateur d'agrégation

- En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet satisfait des **propriétés particulièrement remarquables** (voir p. ex. Grabisch 1997**a**, Marichal 2000) et a pour cas particulier :
  - la moyenne arithmétique pondérée (capacité **additive**) ;
  - les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité **cardinale**) ;
  - les polynômes laticiels (capacité **binaire**).
- **Caractérisée axiomatiquement** en tant qu'opérateur d'agrégation par Marichal (2000).

Interprétation géométrique

- Soit M une fonction de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit μ une capacité sur N tel que $M(1_S, 0_{N \setminus S}) = \mu(S)$ pour tout $S \subseteq N$.
- La fonction M est donc connue sur les **sommets** de l'hypercube unité.
- Grabisch (2004) s'est intéressé à la détermination de M sur $[0,1]^n \setminus \{0,1\}^n$ par **interpolation linéaire**. Il a montré que l'intégrale de Choquet correspond à l'unique interpolation linéaire utilisant $n+1$ sommets de $\{0,1\}^n$. En ce sens, il s'agit de l'**interpolation linéaire la plus simple.**

L'intégrale de Choquet peut être vue comme le moyen le plus simple pour **étendre** à des alternatives quelconques le raisonnement d'un décideur sur des alternatives **binaires**.

Interprétation géométrique

- Soit M une fonction de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit μ une capacité sur N tel que $M(1_S, 0_{N\setminus S}) = \mu(S)$ pour tout $S \subseteq N$.
- La fonction M est donc connue sur les **sommets** de l'hypercube unité.
- Grabisch (2004) s'est intéressé à la détermination de M sur $[0,1]^n \setminus \{0,1\}^n$ par **interpolation linéaire**. Il a montré que l'intégrale de Choquet correspond à l'unique interpolation linéaire utilisant $n+1$ sommets de $\{0,1\}^n$. En ce sens, il s'agit de l'**interpolation linéaire la plus simple.**

L'intégrale de Choquet peut être vue comme le moyen le plus simple pour **étendre** à des alternatives quelconques le raisonnement d'un décideur sur des alternatives **binaires**.

Interprétation géométrique

- Soit M une fonction de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit μ une capacité sur N tel que $M(1_S, 0_{N\setminus S}) = \mu(S)$ pour tout $S \subseteq N$.
- La fonction M est donc connue sur les **sommets** de l'hypercube unité.
- Grabisch (2004) s'est intéressé à la détermination de M sur $[0,1]^n \setminus \{0,1\}^n$ par **interpolation linéaire**. Il a montré que l'intégrale de Choquet correspond à l'unique interpolation linéaire utilisant $n+1$ sommets de $\{0,1\}^n$. En ce sens, il s'agit de l'**interpolation linéaire la plus simple.**

L'intégrale de Choquet peut être vue comme le moyen le plus simple pour **étendre** à des alternatives quelconques le raisonnement d'un décideur sur des alternatives **binaires**.

Interprétation géométrique

- Soit M une fonction de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit μ une capacité sur N tel que $M(1_S, 0_{N\setminus S}) = \mu(S)$ pour tout $S \subseteq N$.
- La fonction M est donc connue sur les **sommets** de l'hypercube unité.
- Grabisch (2004) s'est intéressé à la détermination de M sur $[0,1]^n \setminus \{0,1\}^n$ par **interpolation linéaire**. Il a montré que l'intégrale de Choquet correspond à l'unique interpolation linéaire utilisant $n+1$ sommets de $\{0,1\}^n$. En ce sens, il s'agit de l'**interpolation linéaire la plus simple.**

L'intégrale de Choquet peut être vue comme le moyen le plus simple pour **étendre** à des alternatives quelconques le raisonnement d'un décideur sur des alternatives **binaires**.

Plan

Valeur de Shapley

Valeur de Shapley (1953)

La **valeur de Shapley** d'un jeu μ sur N est définie par

$$\phi_\mu(i) := \sum_{T \subseteq N \setminus i} \gamma_{|T|}(n)[\mu(T \cup i) - \mu(T)], \qquad \forall\, i \in N,$$

où

$$\gamma_t(n) := \frac{(n-t-1)!\, t!}{n!} \qquad (t = 0, 1, \ldots, n-1).$$

La valeur de Shapley d'un critère i par rapport à une capacité μ s'interpréte dans ce contexte comme **le poids moyen** du critère i lors de l'agrégation par C_μ.

Valeur de Shapley

Valeur de Shapley (1953)

La **valeur de Shapley** d'un jeu μ sur N est définie par

$$\phi_\mu(i) := \sum_{T \subseteq N \setminus i} \gamma_{|T|}(n)[\mu(T \cup i) - \mu(T)], \qquad \forall\, i \in N,$$

où

$$\gamma_t(n) := \frac{(n-t-1)!\, t!}{n!} \qquad (t = 0, 1, \ldots, n-1).$$

La valeur de Shapley d'un critère i par rapport à une capacité μ s'interpréte dans ce contexte comme **le poids moyen** du critère i lors de l'agrégation par C_μ.

Valeur de Shapley : interprétation probabiliste

- Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$, notons $(x|x_i = a)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui diffère de x seulement sur sa i-ème composante qui est égale à a.
- De plus, notons

$$\Delta_i C_\mu(x) := C_\mu(x|x_i = 1) - C_\mu(x|x_i = 0).$$

Marichal (1998)

$$\int_{[0,1]^n} \Delta_i C_\mu(x) dx = \phi_\mu(i).$$

Valeur de Shapley : interprétation probabiliste

- Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$, notons $(x|x_i = a)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui diffère de x seulement sur sa i-ème composante qui est égale à a.
- De plus, notons

$$\Delta_i C_\mu(x) := C_\mu(x|x_i = 1) - C_\mu(x|x_i = 0).$$

Marichal (1998)

$$\int_{[0,1]^n} \Delta_i C_\mu(x) dx = \phi_\mu(i).$$

Valeur de Shapley : interprétation probabiliste

- Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$, notons $(x|x_i = a)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui diffère de x seulement sur sa i-ème composante qui est égale à a.
- De plus, notons

$$\Delta_i C_\mu(x) := C_\mu(x|x_i = 1) - C_\mu(x|x_i = 0).$$

Marichal (1998)

$$\int_{[0,1]^n} \Delta_i C_\mu(x) dx = \phi_\mu(i).$$

Autres indices

- Indices d'**interaction** ;
- mesures d'**uniformité** ;
- indices de **veto** et **faveur** ;
- etc.

Tous ces indices sont **linéaires** par rapport à la capacité.

Autres indices

- Indices d'**interaction** ;
- mesures d'**uniformité** ;
- indices de **veto** et **faveur** ;
- etc.

Tous ces indices sont **linéaires** par rapport à la capacité.

Autres indices

- Indices d'**interaction** ;
- mesures d'**uniformité** ;
- indices de **veto** et **faveur** ;
- etc.

Tous ces indices sont **linéaires** par rapport à la capacité.

Autres indices

- Indices d'**interaction** ;
- mesures d'**uniformité** ;
- indices de **veto** et **faveur** ;
- etc.

Tous ces indices sont **linéaires** par rapport à la capacité.

Plan

Théorie de l'utilité multiattribut

- Soit $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, $n \geq 2$, un ensemble d'objets d'intérêt décrits par un ensemble $N := \{1, \ldots, n\}$ d'attributs.
- L'objectif de la théorie de l'utilité multiattribut est de modéliser **numériquement** les préférences d'un décideur.
- Ces préférences prennent mathématiquement la forme d'une relation binaire $\succeq$ qu'il s'agit de représenter par le biais d'une **fonction d'utilité globale** $U : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$x \succeq y \iff U(x) \geq U(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Théorie de l'utilité multiattribut

- Soit $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, $n \geq 2$, un ensemble d'objets d'intérêt décrits par un ensemble $N := \{1, \ldots, n\}$ d'attributs.
- L'objectif de la théorie de l'utilité multiattribut est de modéliser **numériquement** les préférences d'un décideur.
- Ces préférences prennent mathématiquement la forme d'une relation binaire $\succeq$ qu'il s'agit de représenter par le biais d'une **fonction d'utilité globale** $U : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$x \succeq y \iff U(x) \geq U(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Théorie de l'utilité multiattribut

- Soit $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, $n \geq 2$, un ensemble d'objets d'intérêt décrits par un ensemble $N := \{1, \ldots, n\}$ d'attributs.
- L'objectif de la théorie de l'utilité multiattribut est de modéliser **numériquement** les préférences d'un décideur.
- Ces préférences prennent mathématiquement la forme d'une relation binaire $\succeq$ qu'il s'agit de représenter par le biais d'une **fonction d'utilité globale** $U : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$x \succeq y \iff U(x) \geq U(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Théorie de l'utilité multiattribut

- Pour la fonction d'utilité globale, nous considérons le modèle **transitif décomposable** de Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971) (voir aussi Bouyssou & Pirlot 2004), dans lequel U est définie par

$$U(x) := F(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)), \qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,$$

  où les fonctions $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ sont appelées les **fonctions d'utilité** et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, non décroissante en chacun de ses arguments, est parfois appelée la **fonction d'agrégation**.
- Les fonctions d'utilité peuvent être vues comme permettant de traduire les valeurs d'un attribut en **degrés de satisfaction**.

Théorie de l'utilité multiattribut

- Pour la fonction d'utilité globale, nous considérons le modèle **transitif décomposable** de Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971) (voir aussi Bouyssou & Pirlot 2004), dans lequel U est définie par

$$U(x) := F(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)), \qquad \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in X,$$

  où les fonctions $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ sont appelées les **fonctions d'utilité** et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, non décroissante en chacun de ses arguments, est parfois appelée la **fonction d'agrégation**.
- Les fonctions d'utilité peuvent être vues comme permettant de traduire les valeurs d'un attribut en **degrés de satisfaction**.

Théorie de l'utilité multiattribut

- Lorsque que l'**indépendance préférentielle** entre critères peut être supposée, il est fréquent de considérer que la fonction F est additive.
- Le modèle décomposable est alors équivalent au **modèle additif classique**.
- **L'hypothèse d'indépendance préférentielle est cependant rarement vérifiée en pratique.**
- Afin de permettre la prise en compte de **phénomènes d'interaction** entre critères, il a été récemment suggéré d'utiliser une **intégrale de Choquet** (voir p. ex. Grabisch & Labreuche 2004).

Théorie de l'utilité multiattribut

- Lorsque que l'**indépendance préférentielle** entre critères peut être supposée, il est fréquent de considérer que la fonction F est additive.
- Le modèle décomposable est alors équivalent au **modèle additif classique**.
- **L'hypothèse d'indépendance préférentielle est cependant rarement vérifiée en pratique.**
- Afin de permettre la prise en compte de **phénomènes d'interaction** entre critères, il a été récemment suggéré d'utiliser une **intégrale de Choquet** (voir p. ex. Grabisch & Labreuche 2004).

Théorie de l'utilité multiattribut

- Lorsque que l'**indépendance préférentielle** entre critères peut être supposée, il est fréquent de considérer que la fonction F est additive.
- Le modèle décomposable est alors équivalent au **modèle additif classique**.
- **L'hypothèse d'indépendance préférentielle est cependant rarement vérifiée en pratique.**
- Afin de permettre la prise en compte de **phénomènes d'interaction** entre critères, il a été récemment suggéré d'utiliser une **intégrale de Choquet** (voir p. ex. Grabisch & Labreuche 2004).

Théorie de l'utilité multiattribut

- Lorsque que l'**indépendance préférentielle** entre critères peut être supposée, il est fréquent de considérer que la fonction F est additive.
- Le modèle décomposable est alors équivalent au **modèle additif classique**.
- **L'hypothèse d'indépendance préférentielle est cependant rarement vérifiée en pratique.**
- Afin de permettre la prise en compte de **phénomènes d'interaction** entre critères, il a été récemment suggéré d'utiliser une **intégrale de Choquet** (voir p. ex. Grabisch & Labreuche 2004).

Théorie de l'utilité multiattribut

- L'utilisation de l'intégrale de Choquet en tant que fonction d'utilité globale nécessite que les fonctions d'utilité soient **commensurables**, c.-à-d. $u_i(x_i) = u_j(x_j)$ si et seulement si, pour le décideur, l'alternative x est satisfaite avec la même intensité selon les critères i et j.
- Dans le contexte considéré, Labreuche & Grabisch (2003) ont proposé une construction rigoureuse des fonctions d'utilité fondée sur la **méthode MACBETH** (Bana e Costa & Vansnick 1999).
- **Condition nécessaire :** connaître deux niveaux particuliers sur chaque attribut ayant la même signification **absolue**.

Théorie de l'utilité multiattribut

- L'utilisation de l'intégrale de Choquet en tant que fonction d'utilité globale nécessite que les fonctions d'utilité soient **commensurables**, c.-à-d. $u_i(x_i) = u_j(x_j)$ si et seulement si, pour le décideur, l'alternative x est satisfaite avec la même intensité selon les critères i et j.
- Dans le contexte considéré, Labreuche & Grabisch (2003) ont proposé une construction rigoureuse des fonctions d'utilité fondée sur la **méthode MACBETH** (Bana e Costa & Vansnick 1999).
- **Condition nécessaire :** connaître deux niveaux particuliers sur chaque attribut ayant la même signification **absolue**.

Théorie de l'utilité multiattribut

- L'utilisation de l'intégrale de Choquet en tant que fonction d'utilité globale nécessite que les fonctions d'utilité soient **commensurables**, c.-à-d. $u_i(x_i) = u_j(x_j)$ si et seulement si, pour le décideur, l'alternative x est satisfaite avec la même intensité selon les critères i et j.
- Dans le contexte considéré, Labreuche & Grabisch (2003) ont proposé une construction rigoureuse des fonctions d'utilité fondée sur la **méthode MACBETH** (Bana e Costa & Vansnick 1999).
- **Condition nécessaire :** connaître deux niveaux particuliers sur chaque attribut ayant la même signification **absolue**.

Plan

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble** $\mathcal{O}$, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance de certains critères ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble $\mathcal{O}$**, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance des coalitions ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble $\mathcal{O}$**, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance de certains critères ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble** $\mathcal{O}$, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance de certains critères ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble $\mathcal{O}$**, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance de certains critères ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Une fois des fonctions d'utilité commensurables déterminées, il s'agit d'identifier une capacité, si elle existe, telle que l'**intégrale de Choquet** par rapport à cette capacité **représente numériquement** les préférences du décideur.
- En pratique, le décideur raisonne généralement sur un **sous-ensemble** $\mathcal{O}$, usuellement de faible cardinal, de l'ensemble X des objets d'intérêts.
- Les **préférences initiales** du décideur, à partir desquelles la capacité doit être déterminée, peuvent prendre la forme :
  - d'un préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ sur les objets disponibles ;
  - d'un préordre partiel $\succeq_N$ sur les critères ;
  - d'intuitions quantitatives sur l'importance de certains critères ;
  - etc.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Pour tout $x \in X$, notons $u(x)$ le vecteur des **utilités partielles** $(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$.
- Dans le contexte considéré, il semble naturel de **traduire** le préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ comme suit :

$$x \succ_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) > C_\mu(u(x'))$$

$$x \sim_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) = C_\mu(u(x'))$$

  où μ est la capacité à déterminer.
- De même, $i \succ_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$ et $i \sim_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Pour tout $x \in X$, notons $u(x)$ le vecteur des **utilités partielles** $(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$.
- Dans le contexte considéré, il semble naturel de **traduire** le préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ comme suit :

$$x \succ_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) > C_\mu(u(x'))$$

$$x \sim_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) = C_\mu(u(x'))$$

  où μ est la capacité à déterminer.
- De même, $i \succ_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$ et $i \sim_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$.

Formulation du problème d'identification de capacités

- Pour tout $x \in X$, notons $u(x)$ le vecteur des **utilités partielles** $(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$.
- Dans le contexte considéré, il semble naturel de **traduire** le préordre partiel $\succeq_{\mathcal{O}}$ comme suit :

$$x \succ_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) > C_\mu(u(x'))$$

$$x \sim_{\mathcal{O}} x' \text{ peut être traduit par } C_\mu(u(x)) = C_\mu(u(x'))$$

  où μ est la capacité à déterminer.
- De même, $i \succ_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$ et $i \sim_N j$ peut être traduit par $\phi_\mu(i) = \phi_\mu(j)$.

Formulation du problème d'identification de capacités

La plupart des méthodes d'identification proposées dans la littérature peuvent alors se mettre sous la forme du **problème d'optimisation** suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{min ou max } \mathcal{F}(\dots) & \\ \text{sous les contraintes} & \left\{ \begin{array}{l} \mu(S \cup i) - \mu(S) \geq 0, \forall\, i \in N, \forall\, S \subseteq N \setminus i, \\ \mu(\emptyset) = 0, \mu(N) = 1, \\ C_\mu(u(x)) - C_\mu(u'(x)) \geq \delta_C, \\ \vdots \\ \phi_\mu(i) - \phi_\mu(j) \geq \delta_{Sh} \\ \vdots \end{array} \right. \end{array}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction objectif qui diffère selon la méthode d'identification choisie.

Principales méthodes d'identification de capacités

- Approches fondées sur les **moindres carrés** (Mori & Murofushi 1989, Grabisch 1995) ;
- Approche fondée sur la **programmation linéaire** (Marichal & Roubens 2000) ;
- Moindres carrés **généralisés** (Meyer & Roubens 2005).
- Méthode du **minimum de variance** (Kojadinovic 2006a), qui peut également s'interpréter comme une méthode du **maximum d'entropie** ;
- Méthode du **minimum de distance** (Kojadinovic 2006b).

Principales méthodes d'identification de capacités

- Approches fondées sur les **moindres carrés** (Mori & Murofushi 1989, Grabisch 1995) ;
- Approche fondée sur la **programmation linéaire** (Marichal & Roubens 2000) ;
- Moindres carrés **généralisés** (Meyer & Roubens 2005).
- Méthode du **minimum de variance** (Kojadinovic 2006**a**), qui peut également s'interpréter comme une méthode du **maximum d'entropie** ;
- Méthode du **minimum de distance** (Kojadinovic 2006**b**).

Principales méthodes d'identification de capacités

- Approches fondées sur les **moindres carrés** (Mori & Murofushi 1989, Grabisch 1995) ;
- Approche fondée sur la **programmation linéaire** (Marichal & Roubens 2000) ;
- Moindres carrés **généralisés** (Meyer & Roubens 2005).
- Méthode du **minimum de variance** (Kojadinovic 2006**a**), qui peut également s'interpréter comme une méthode du **maximum d'entropie** ;
- Méthode du **minimum de distance** (Kojadinovic 2006**b**).

Principales méthodes d'identification de capacités

- Approches fondées sur les **moindres carrés** (Mori & Murofushi 1989, Grabisch 1995) ;
- Approche fondée sur la **programmation linéaire** (Marichal & Roubens 2000) ;
- Moindres carrés **généralisés** (Meyer & Roubens 2005).
- Méthode du **minimum de variance** (Kojadinovic 2006**a**), qui peut également s'interpréter comme une méthode du **maximum d'entropie** ;
- Méthode du **minimum de distance** (Kojadinovic 2006**b**).

Principales méthodes d'identification de capacités

- Approches fondées sur les **moindres carrés** (Mori & Murofushi 1989, Grabisch 1995) ;
- Approche fondée sur la **programmation linéaire** (Marichal & Roubens 2000) ;
- Moindres carrés **généralisés** (Meyer & Roubens 2005).
- Méthode du **minimum de variance** (Kojadinovic 2006**a**), qui peut également s'interpréter comme une méthode du **maximum d'entropie** ;
- Méthode du **minimum de distance** (Kojadinovic 2006**b**).

Aspects pratiques

En pratique, afin de **diminuer** le nombre d'inconnues, des classes spéciales d'intégrales de Choquet sont généralement utilisées ; elles sont obtenues en considérant des **capacités k-additives** (Grabisch 1997**b**) définies par $\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$ coefficients.

Outils logiciels : Package **Kappalab** pour GNU R (Grabisch, Kojadinovic & Meyer 2006) :

- GNU R est un système statistique libre (à la Matlab) ;
- Kappalab est une boîte à outils pour la manipulation de mesures et intégrales non additives, distribuée sous licence libre.

Aspects pratiques

En pratique, afin de **diminuer** le nombre d'inconnues, des classes spéciales d'intégrales de Choquet sont généralement utilisées ; elles sont obtenues en considérant des **capacités k-additives** (Grabisch 1997**b**) définies par $\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$ coefficients.

Outils logiciels : Package **Kappalab** pour GNU R (Grabisch, Kojadinovic & Meyer 2006) :

- GNU R est un système statistique libre (à la Matlab) ;
- **Kappalab** est une boîte à outils pour la manipulation de mesures et intégrales non additives, distribuée sous licence libre.

Aspects pratiques

En pratique, afin de **diminuer** le nombre d'inconnues, des classes spéciales d'intégrales de Choquet sont généralement utilisées ; elles sont obtenues en considérant des **capacités k-additives** (Grabisch 1997**b**) définies par $\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$ coefficients.

Outils logiciels : Package **Kappalab** pour GNU R (Grabisch, Kojadinovic & Meyer 2006) :

- GNU R est un système statistique libre (à la Matlab) ;
- **Kappalab** est une boîte à outils pour la manipulation de mesures et intégrales non additives, distribuée sous licence libre.

Aspects pratiques

En pratique, afin de **diminuer** le nombre d'inconnues, des classes spéciales d'intégrales de Choquet sont généralement utilisées ; elles sont obtenues en considérant des **capacités k-additives** (Grabisch 1997**b**) définies par $\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$ coefficients.

Outils logiciels : Package **Kappalab** pour GNU R (Grabisch, Kojadinovic & Meyer 2006) :

- GNU R est un système statistique libre (à la Matlab) ;
- **Kappalab** est une boîte à outils pour la manipulation de mesures et intégrales non additives, distribuée sous licence libre.

Plan

Exemple : les quatre cuisiniers

Exemple proposé par Marichal & Roubens (2000).

- X : ensemble des cuisiniers évalués selon leur aptitude à préparer trois mets : les cuisses de grenouilles (CG), le steak tartare (ST) et les coquilles Saint-Jacques (SJ).
- $\mathcal{O}$: quatre cuisiniers a, b, c, d dont les évaluations (utilités), sur l'échelle $[0, 20]$, sont données ci-après :

Cuisiniers	CG	ST	SJ
a	18	15	19
b	15	18	19
c	15	18	11
d	18	15	11

Exemple : les quatre cuisiniers

Exemple proposé par Marichal & Roubens (2000).

- X : ensemble des cuisiniers évalués selon leur aptitude à préparer trois mets : les cuisses de grenouilles (CG), le steak tartare (ST) et les coquilles Saint-Jacques (SJ).
- $\mathcal{O}$: quatre cuisiniers a, b, c, d dont les évaluations (utilités), sur l'échelle $[0, 20]$, sont données ci-après :

Cuisiniers	CG	ST	SJ
a	18	15	19
b	15	18	19
c	15	18	11
d	18	15	11

Exemple : les quatre cuisiniers

Raisonnement du décideur :

- lorsqu'un cuisinier **est reconnu** pour sa préparation des coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux les cuisses de grenouilles que le steak tartare ;
- à l'inverse, lorsqu'un cuisinier **ne prépare pas bien** les coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux le steak tartare que les cuisses de grenouilles.
- Ainsi, $a \succ b \succ c \succ d$.

Il n'existe pas de **modèle additif** permettant de représenter ces préférences.

Exemple : les quatre cuisiniers

Raisonnement du décideur :

- lorsqu'un cuisinier **est reconnu** pour sa préparation des coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux les cuisses de grenouilles que le steak tartare ;
- à l'inverse, lorsqu'un cuisinier **ne prépare pas bien** les coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux le steak tartare que les cuisses de grenouilles.
- Ainsi, $a \succ b \succ c \succ d$.

Il n'existe pas de **modèle additif** permettant de représenter ces préférences.

Exemple : les quatre cuisiniers

Raisonnement du décideur :

- lorsqu'un cuisinier **est reconnu** pour sa préparation des coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux les cuisses de grenouilles que le steak tartare ;
- à l'inverse, lorsqu'un cuisinier **ne prépare pas bien** les coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux le steak tartare que les cuisses de grenouilles.
- Ainsi, $a \succ b \succ c \succ d$.

Il n'existe pas de **modèle additif** permettant de représenter ces préférences.

Exemple : les quatre cuisiniers

Raisonnement du décideur :

- lorsqu'un cuisinier **est reconnu** pour sa préparation des coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux les cuisses de grenouilles que le steak tartare ;
- à l'inverse, lorsqu'un cuisinier **ne prépare pas bien** les coquilles Saint-Jacques, il est préférable qu'il prépare mieux le steak tartare que les cuisses de grenouilles.
- Ainsi, $a \succ b \succ c \succ d$.

Il n'existe pas de **modèle additif** permettant de représenter ces préférences.

Exemple : les quatre cuisiniers

À l'aide de **Kappalab**, il est par exemple possible d'obtenir la capacité la **"moins spécifique"** telle que l'intégrale de Choquet par rapport à cette capacité représente numériquement le rangement du décideur.

- Il faut commencer par définir quatre vecteurs contenant les utilités partielles des quatre cuisiniers :

```
a <- c(18,15,19)
b <- c(15,18,19)
c <- c(15,18,11)
d <- c(18,15,11)
```

Exemple : les quatre cuisiniers

À l'aide de **Kappalab**, il est par exemple possible d'obtenir la capacité la **"moins spécifique"** telle que l'intégrale de Choquet par rapport à cette capacité représente numériquement le rangement du décideur.

- Il faut commencer par définir quatre vecteurs contenant les utilités partielles des quatre cuisiniers :

```
a <- c(18,15,19)
b <- c(15,18,19)
c <- c(15,18,11)
d <- c(18,15,11)
```

Exemple : les quatre cuisiniers

- Stocker l'information préférentielle "a est préféré à b" et "c est préféré à d" dans une matrice R :

```
delta.C <- 1
Acp <- rbind(c(a,b,delta.C),c(c,d,delta.C))
```

- Utiliser la méthode du **minimum de variance** pour déterminer la capacité la **"moins spécifique"** compatible avec l'information préférentielle fournie :

```
s <- mini.var.capa.ident(3,3,A.Choquet.preorder = Acp)
```

Exemple : les quatre cuisiniers

- Stocker l'information préférentielle "a est préféré à b" et "c est préféré à d" dans une matrice R :
```
delta.C <- 1
Acp <- rbind(c(a,b,delta.C),c(c,d,delta.C))
```
- Utiliser la méthode du **minimum de variance** pour déterminer la capacité la **"moins spécifique"** compatible avec l'information préférentielle fournie :
```
s <- mini.var.capa.ident(3,3,A.Choquet.preorder =
Acp)
```

Exemple : les quatre cuisiniers

- Afficher la capacité solution :

```
mu <- zeta(s$solution)
{}      0.00        {12}    0.67
{1}     0.17        {13}    0.84
{2}     0.50        {23}    0.50
{3}     0.34        {123}   1.00
```

Exemple : les quatre cuisiniers

Et calculer les **utilités globales** des quatre cuisiniers :

```
Choquet.integral(mu,a)
17.83334
Choquet.integral(mu,b)
16.83334
Choquet.integral(mu,c)
15.16666
Choquet.integral(mu,d)
14.16666
```

Faiblesses axiomatiques

Bouyssou & Pirlot (2004)

Soit $\succeq$ une relation binaire sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe des fonctions $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, non décroissante en chacun de ses arguments, telles que

$$x \succeq y \iff F(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)) \geq F(u_1(y_1), \dots, u_n(y_n)) ;$$

(ii) la reltion binaire $\succeq$ est un **préordre complet**, **faiblement séparable**, satisfaisant la **condition d'ordre-densité** usuelle.

Faiblesses axiomatiques

Bouyssou & Pirlot (2004)

Soit $\succeq$ une relation binaire sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe des fonctions $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, non décroissante en chacun de ses arguments, telles que

$$x \succeq y \iff F(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)) \geq F(u_1(y_1), \dots, u_n(y_n)) \ ;$$

(ii) la reltion binaire $\succeq$ est un **préordre complet**, **faiblement séparable**, satisfaisant la **condition d'ordre-densité** usuelle.

Faiblesses axiomatiques

Bouyssou & Pirlot (2004)

Soit $\succsim$ une relation binaire sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe des fonctions $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, non décroissante en chacun de ses arguments, telles que

$$x \succsim y \iff F(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) \geq F(u_1(y_1), \ldots, u_n(y_n)) \; ;$$

(ii) la reltion binaire $\succsim$ est un **préordre complet**, **faiblement séparable**, satisfaisant la **condition d'ordre-densité** usuelle.

Faiblesses axiomatiques

- Si $\succeq$ satisfait de plus **2-graded**, caractérisation du modèle transitif décomposable fondé sur l'intégrale de Sugeno (Bouyssou & Pirlot 2006).
- Et Choquet? L'intuition pousse à essayer de généraliser l'axiome **Cardinal Coordinate Independence** de Wakker (1989) dans le cas d'un produit cartésien **non homogène**.
- "Il existe des sous-ensembles de X tels que les restrictions de $\succeq$ à ces sous-ensembles satisfont des axiomes d'annulation classiques ..."
- Et la **continuité**? ... Heu ...
- **Bon courage, Denis, Marc et Thierry!**

Faiblesses axiomatiques

- Si $\succeq$ satisfait de plus **2-graded**, caractérisation du modèle transitif décomposable fondé sur l'intégrale de Sugeno (Bouyssou & Pirlot 2006).
- Et Choquet? L'intuition pousse à essayer de généraliser l'axiome **Cardinal Coordinate Independence** de Wakker (1989) dans le cas d'un produit cartésien **non homogène**.
- "Il existe des sous-ensembles de X tels que les restrictions de $\succeq$ à ces sous-ensembles satisfont des axiomes d'annulation classiques ..."
- Et la **continuité**? ... Heu ...
- **Bon courage, Denis, Marc et Thierry!**

Faiblesses axiomatiques

- Si $\succeq$ satisfait de plus **2-graded**, caractérisation du modèle transitif décomposable fondé sur l'intégrale de Sugeno (Bouyssou & Pirlot 2006).
- Et Choquet? L'intuition pousse à essayer de généraliser l'axiome **Cardinal Coordinate Independence** de Wakker (1989) dans le cas d'un produit cartésien **non homogène**.
- "Il existe des sous-ensembles de X tels que les restrictions de $\succeq$ à ces sous-ensembles satisfont des axiomes d'annulation classiques ..."
- Et la **continuité**? ... Heu ...
- **Bon courage, Denis, Marc et Thierry!**

Faiblesses axiomatiques

- Si $\succeq$ satisfait de plus **2-graded**, caractérisation du modèle transitif décomposable fondé sur l'intégrale de Sugeno (Bouyssou & Pirlot 2006).
- Et Choquet? L'intuition pousse à essayer de généraliser l'axiome **Cardinal Coordinate Independence** de Wakker (1989) dans le cas d'un produit cartésien **non homogène**.
- "Il existe des sous-ensembles de X tels que les restrictions de $\succeq$ à ces sous-ensembles satisfont des axiomes d'annulation classiques ..."
- Et la **continuité**? ...Heu ...
- Bon courage, Denis, Marc et Thierry!

Faiblesses axiomatiques

- Si $\succsim$ satisfait de plus **2-graded**, caractérisation du modèle transitif décomposable fondé sur l'intégrale de Sugeno (Bouyssou & Pirlot 2006).
- Et Choquet? L'intuition pousse à essayer de généraliser l'axiome **Cardinal Coordinate Independence** de Wakker (1989) dans le cas d'un produit cartésien **non homogène**.
- "Il existe des sous-ensembles de X tels que les restrictions de $\succsim$ à ces sous-ensembles satisfont des axiomes d'annulation classiques ..."
- Et la **continuité**? ... Heu ...
- **Bon courage, Denis, Marc et Thierry!**

Bana e Costa, C. & Vansnick, J. (1999), Preference relations in MCDM, **in** T. Gal & T. H. T. Steward, eds, 'MultiCriteria Decision Making: Advances in MCDM models, algorithms, theory and applications', Kluwer.

Bouyssou, D. & Pirlot, M. (2004), 'Preferences for multi-attributed alternatives: Traces, dominance, and numerical representations', **J. of Mathematical Psychology 48**, 167–185.

Choquet, G. (1953), 'Theory of capacities', **Annales de l'Institut Fourier 5**, 131–295.

Denneberg, D. (2000), Non-additive measure and integral, basic concepts and their role for applications, **in** M. Grabisch, T. Murofushi & M. Sugeno, eds, 'Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications', Physica-Verlag, pp. 42–69.

Grabisch, M. (1992), 'The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making', **European Journal of Operational Research** **89**, 445–456.

Grabisch, M. (1995), A new algorithm for identyfing fuzzy measures and its application to pattern recognition, **in** 'Int. 4th IEEE Conf. on Fuzzy Systems', Yokohama, Japan, pp. 145–150.

Grabisch, M. (1997**a**), 'Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making', **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems** **5**(5), 587–607.

Grabisch, M. (1997**b**), '*k*-order additive discrete fuzzy measures and their representation', **Fuzzy Sets and Systems** **92**(2), 167–189.

Grabisch, M. (2004), The Choquet integral as a linear interpolator, **in** '10th Int. Conf. on Information Processing and

Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU 2004)', Perugia, Italy, pp. 373–378.

Grabisch, M. & Labreuche, C. (2004), Fuzzy measures and integrals in MCDA, **in** J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, eds, 'Multiple Criteria Decision Analysis', Springer, pp. 563–608.

Grabisch, M., Kojadinovic, I. & Meyer, P. (2006), `kappalab`: **Non additive measure and integral manipulation functions**. R package version 0.3.

Kojadinovic, I. (2006a), 'Minimum variance capacity identification', **European Journal of Operational Research** p. in press.

Kojadinovic, I. (2006b), 'Quadratic distances for capacity and bi-capacity approximation and identification', **Quarterly Journal of Operations Research** p. in press.

Krantz, D., Luce, R., Suppes, P. & Tversky, A. (1971), **Foundations of measurement, volume 1: Additive and polynomial representations**, Academic Press.

Labreuche, C. & Grabisch, M. (2003), 'The Choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making', **Fuzzy Sets and Systems 137**, 11–16.

Marichal, J.-L. (1998), Aggregation operators for multicriteria decison aid, PhD thesis, University of Liège, Liège, Belgium.

Marichal, J.-L. (2000), 'An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria', **IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8**(6), 800–807.

Marichal, J.-L. & Roubens, M. (2000), 'Determination of weights of interacting criteria from a reference set', **European Journal of Operational Research 124**, 641–650.

Meyer, P. & Roubens, M. (2005), Choice, ranking and sorting in fuzzy Multiple Criteria Decision Aid, **in** J. Figueira, S. Greco & M. Ehrgott, eds, 'Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys', Springer, New York, pp. 471–506.

Mori, T. & Murofushi, T. (1989), An analysis of evaluation model using fuzzy measure and the Choquet integral, in '5th Fuzzy System Symposium', Kobe, Japan, pp. 207–212. In Japanese.

Shapley, L. S. (1953), A value for *n*-person games, in 'Contributions to the theory of games, vol. 2', Annals of Mathematics Studies, no. 28, Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 307–317.

Sugeno, M. (1974), Theory of fuzzy integrals and its applications, PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.