L'intégrale de Choquet bipolaire: motivations et considérations pratiques

Christophe Labreuche

Thales Research & Technology

Palaiseau, France

THALES

But de l'Aide à la Décision

L'Aide MultiCritère à la Décision

- a pour but d'aider un décideur à choisir une action parmi plusieurs,
- en concentrant les débats sur les différents points de vue à prendre en compte.

Pour ce faire,

- Un modèle multicritère censé représenter les préférences du décideur est construit.
- Ce modèle est appliqué sur les actions à comparer, ce qui induit une prescription faite par le modèle.
- Il peut y avoir une réaction du décideur, amenant à affiner le modèle (approche constructive).

But de l'Aide à la Décision

Apport de l'aide multicritère à la décision:

- Dans la phase de désagrégation (construction du modèle)
  - ◇ Aide le décideur à poser le problème: Les problèmes de décision sont mal posés.
  - ◇ Détermination des points de vue pertinents.
  - ◇ Assure une certaine cohérence entre les informations préférentielles fournies par le décideur, eu égard au modèle choisi.
- Dans la phase d'agrégation (application du modèle)
  - ◇ Application automatique du modèle sur un grand nombre d'actions (problème combinatoire voire de nature continue);
  - ◇ Capitalisation de l'expertise sous forme d'un modèle;
  - ◇ Proposer toujours le même jugement
  - ◇ Possibilité d'outils de visualisation des résultats des analyses multicritères.

Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

Plan

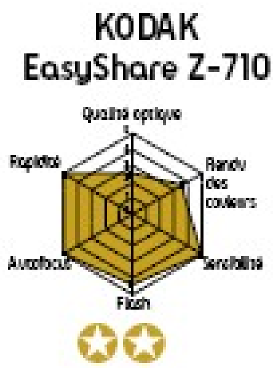
- **Points de réflexion du décideur**
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

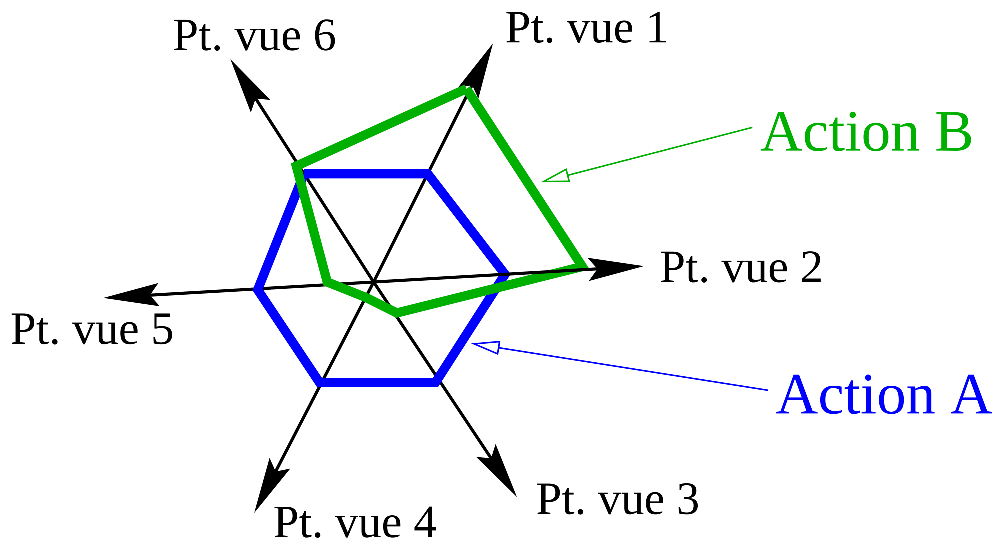
Points de réflexion du décideur

Sur quels aspects doit-on faire réfléchir le décideur? Exemple: comparer deux actions A et B.

- La phase de structuration du problème a permis de construire 6 points de vue.
- On voit souvent une représentation des actions sous forme d'un diagramme radar ou araignée.

Exemple: Appareils Photo notés suivant 6 points de vue, avec note globale. ***qualité optique, rendu des couleurs, sensibilité, flash, autofocus, rapidité*** .





Ce type de représentation est simple à comprendre mais requiert des précautions.

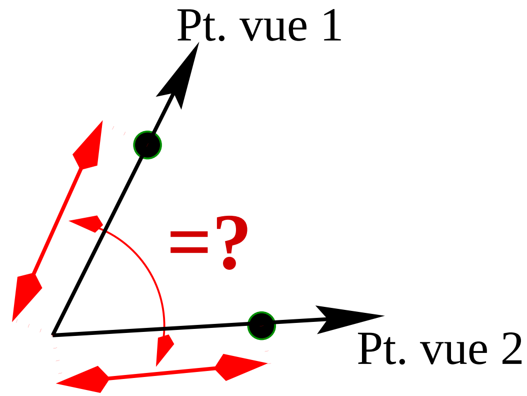
Points de réflexion du décideur

Interprétation des comparaisons possibles:

- Comparaison 1: La solution **A** est préférée à la solution **B** puisque **A n'a pas de lacune** (elle semble mieux **équilibrée**).

- Comparaison 2: La solution **B** est préférée à la solution **A** puisque **B** est meilleur que **A** suivant **les points de vue 1 et 2** qui sont **très importants**.

Analyse de ces deux interprétations:



- Problème de **dimensionnement** (comparaison 1)

  ▷ Comparaison entre les valeurs de différents points de vue

  ▷ Une même distance à l'origine sur deux axes représente-t-elle une même intensité de préférence?

- **Importance relative** d'un point de vue vis-à-vis d'un autre (comparaison 2)

  ▷ Compromis, arbitrage entre les points de vue

  ▷ Le profil idéal est un équilibre entre les différents points de vue (pas de lacune): notion plus complexe d'**interaction** entre critères

Modèle de représentation des préférences

- $N = \{1, \ldots, n\}$: points de vue à prendre en compte
- X_i: attribut, descripteur représentant le point de vue i
- $X = X_1 \times \cdots \times X_n$: ensemble des actions potentielles.
- $\succeq$: relation de préférences du décideur.

Sous l'hypothèse que $\succeq$ est un pre-ordre ordre dense, que $\succeq$ soit faiblement séparable

$$\forall x_i, y_i \in X_i, \forall z_{N\setminus\{i\}}, t_{N\setminus\{i\}} \in X_{N\setminus\{i\}} \quad (x_i, z_{N\setminus\{i\}}) \succeq (y_i, z_{N\setminus\{i\}}) \iff (x_i, t_{N\setminus\{i\}}) \succeq (y_i, t_{N\setminus\{i\}})$$

alors $\succeq$ se représente à l'aide du model transitif decomposable [Krantz et al '71]

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$$

où

$$u(x) = F(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$$

$\diamond$ $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ - **fonctions d'utilité**

$\diamond$ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - **fonction d'agrégation**

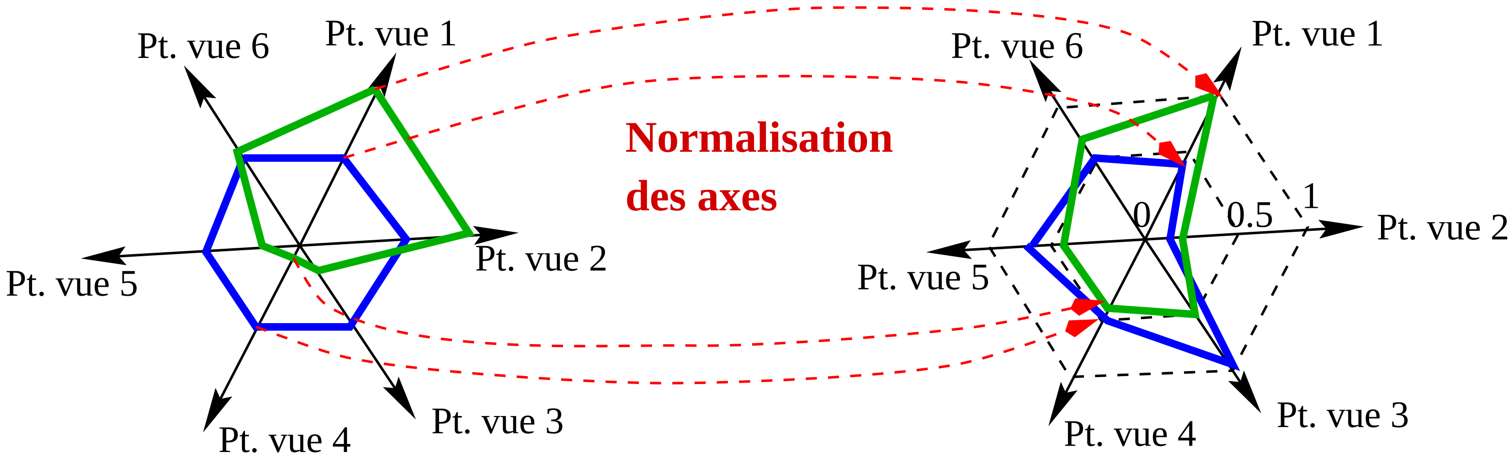
Modèle de représentation des préférences

u_i représente les préférences du décideur concernant le point de vue i

$$u_i(x_i) \geq u_i(y_i) \iff x_i \succeq_i y_i \iff \forall z_{N\setminus\{i\}} \in X_{N\setminus\{i\}} \quad (x_i, z_{N\setminus\{i\}}) \succeq (y_i, z_{N\setminus\{i\}})$$

Mais cela n'implique pas la **commensurabilité** entre points de vue:

> **Propriété de Commensurabilité:** $u_i(x_i) \geq u_j(x_j)$ ssi x_i est au moins aussi attractif que x_j.



Cette propriété n'est pas assurée si u_i est déterminé directement à partir de $\succeq$.

<u>Conclusion:</u> Il faut demander d'autres informations

pour assurer la commensurabilité entre critères.

Modèle de représentation des préférences

Choix à faire pour le modèle:

- Choix de l'échelle
  - ◇ Échelle unipolaire
  - ◇ Échelle bipolaire
- Choix de la famille de fonctions d'agrégation paramétrée par des "poids"
  - ◇ Somme pondérée
  - ◇ Intégrale de Choquet

en fonction des stratégies de décision / préférences du décideur.

Les aspects suivants :

▷ **Interaction entre critère**: importance relative conditionnelle, veto, complémentarité, . . .

▷ Rôle de **l'affect** dans les stratégies de décision.

conduisent au choix d'une échelle bipolaire et d'une agrégation du type Choquet.

Plan

- Points de réflexion du décideur
- **Exemple d'interaction bipolaire entre critères**
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

Exemple d'importance relative conditionnelle bipolaire

- Domaine applicatif: **Analyse financière pour l'octroi de crédit**.
- Trois points de vue
  - ▷ point de vue j: taux d'endettement actuel du demandeur en $\%$ (D)
  - ▷ point de vue j^+: nombre de paiements en retard (P)
  - ▷ point de vue j^-: apport initial sur l'acquisition (C)
- Règles fournies par l'analyste financier:
  - ▷ D est le point de vue principal.
  - ▷ Si D est attractif, C n'est pas primordial.
  - ▷ Si D est mauvais, il faut au moins que C soit bien satisfait.
- Conclusion

  Règle $(\mathbf{R1})$:

  Si le critère j est bien-satisfait, alors j^+ est plus important que j^-.

  Si le critère j est mal-satisfait, alors j^+ est moins important que j^-.

Exemple de Veto

- Domaine applicatif: **Ingénierie des Systèmes Complexes**.
- On a deux types de critères
  - ▷ On a souvent recours à la simulation pour évaluer ce type de systèmes.

    Les résultats des simulations fournissent des indicateurs parfois appelés **métriques** (critères fonctionnels F).
  - ▷ On a également des critères dits **non fonctionnels** (NF)

    Exemple: coût d'acquisition, de possession, de maturité technologique, . . .
- Si les critères fonctionnels ne sont pas satisfaits alors le client jugera la solution inacceptable, même si les aspects non fonctionnels sont très bien satisfaits.
- Lorsque les critères fonctionnels sont satisfaisants, alors le client considère qu'un gain suivant les aspects non fonctionnels peut compenser un déficit suivant les critères fonctionnels.
- Conclusion: Stratégie de décision bipolaire.

Si les critères F sont mal-satisfaits, alors ils se comportent comme un veto.

Si les critères F est bien-satisfait, alors il y a compensation entre F et NF.

Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- **Choix du type d'échelle associée à X_i**
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

Choix du type d'échelle associée à X_i

- **Critère unipolaire borné**. Échelle associée: $[0, 1]$
  - ◇ "0" correspond à l'abscence totale de la propriété
  - ◇ "1" correspond à la présence totale de la propriété

  Exemple: degré d'appartenance, de crédibilité, d'incertitude.

- **Critère bipolaire**. Échelle associée: $\mathbb{R}$.

  Il existe un élément appelé **élément neutre** tel que
  - ◇ les éléments meilleurs sont jugés **bons**: notion d'attraction.
  - ◇ les éléments moins bons sont jugés **mauvais**: notion de repulsion.

  Justification de ce type d'échelle: Slovic a montré que notre façon de juger, évaluer ou prendre des décisions est guidée par **l'affect**. Il y a un **affect positif** et un **affect négatif**.

  Conclusion: On devrait systématique utiliser une échelle bipolaire pour représenter les préférences d'un agent.

Choix du type d'échelle associée à X_i

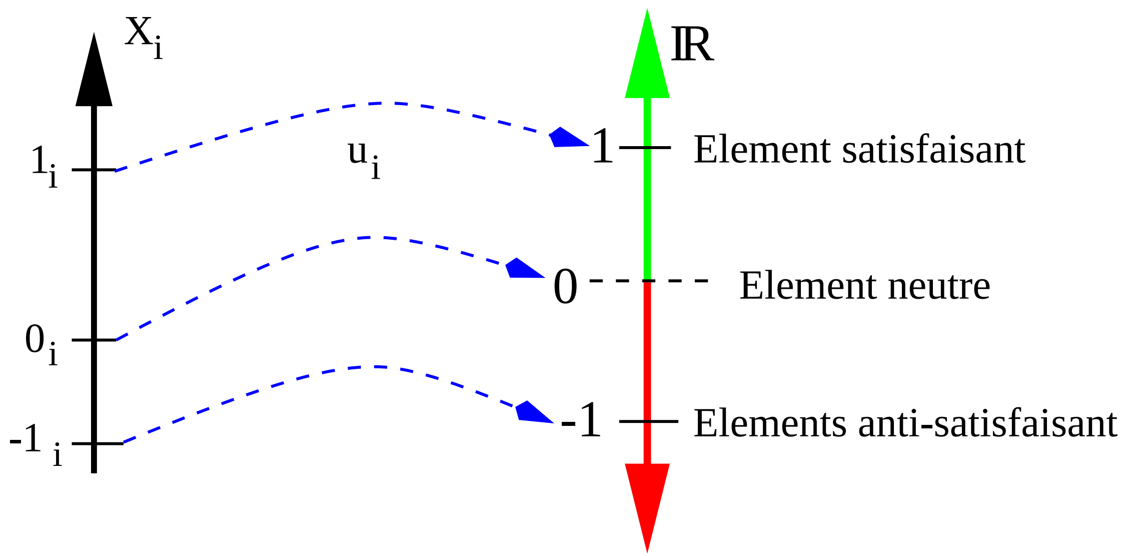
Définition d'éléments particuliers sur une échelle bipolaire X_i

- $\mathbf{0}_i$: **élément neutre**. Élément de X_i qui est jugé ni bon ni mauvais.
- $\mathbf{1}_i$: **élément satisfaisant**. Élément de X_i qui est jugé satisfaisant, mais il peut exister des éléments encore meilleurs.

  C'est la notion de **Satisfycing** élément dans la théorie de la rationalité bornée de Simon.
- $-\mathbf{1}_i$: **élément anti-satisfaisant**. Élément de X_i qui est jugé non-satisfaisant, mais il peut exister des éléments encore pires. C'est la notion duale de l'élément satisfaisant.

On a coutume de poser (si cela est possible)

$$u_i(\mathbf{1}_i) = 1$$
$$u_i(\mathbf{0}_i) = 0$$
$$u_i(-\mathbf{1}_i) = -1$$



THALES

Choix du type d'échelle associée à X_i

Parfois ces niveaux de référence ont du sens:

- Exemple: aide à la conception pour l'ingénierie de systèmes complexes.
  - ▷ Niveau neutre: valeur correspond à l'existant. C'est ni bon ni mauvais si le nouveau système arrive à ce qui se fait aujourd'hui.
  - ▷ Niveau satisfaisant: valeur cible à atteindre, niveau d'aspiration. On se fixe un objectif et on est satisfait s'il est tenu.
  - ▷ Niveau anti-satisfaisant: valeur obtenue sur la génération antérieure de systèmes. Revenir à ces valeurs serait vu comme une régression.

Mais, on a du mal parfois à les définir. Toutefois:

- Problème de l'évaluabilité: Des études en Psychologie ont montré que les gens ont tendance à négliger les points de vue sur lesquels un point de repère manque [Hsee '96].

  Slovic a remarqué également l'importance d'un ancrage.
- La théorie du signe [Lin, Slovic '03]. Tout objet est assigné à l'une des trois classes: positif, négatif ou neutre. Les trois niveaux de référence correspondent à un élément typique de chaque classe.

Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- **Construction de la fonction d'utilité**
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

Construction de la fonction d'utilité

La notion de poids relatif d'un critère a du sens pour un décideur.

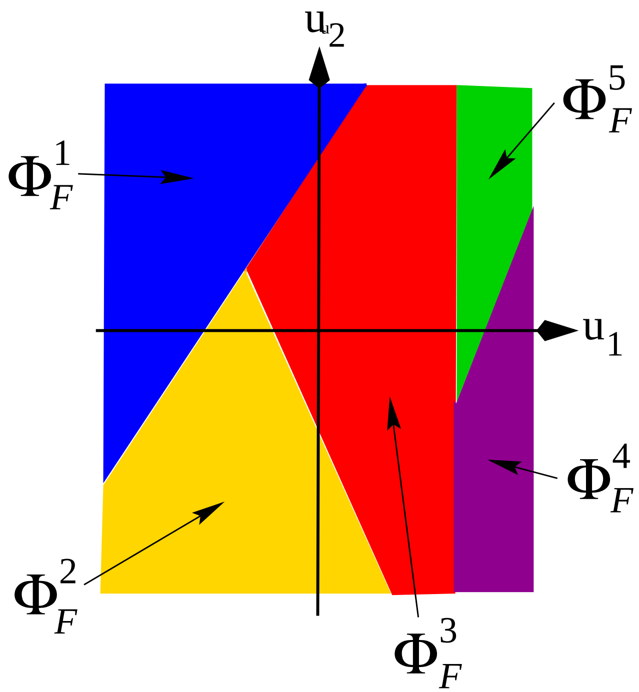
Considérons un modèle généralisant la somme pondérée

$$F(a) = \sum_{i \in N} w_i(a)\, a_i \ ,$$

où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $w_i(a)$ est le poids du critère i.

On suppose que F est affine par morceaux.

- Il existe une partition $\Phi(F) = \left\{ \Phi_F^1, \ldots, \Phi_F^{\phi(F)} \right\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque $w_i(a)$ soit constant dans chaque ensemble Φ_F^l.



Construction de la fonction d'utilité

- Afin de réduire la complexité de la détermination du modèle multicritère, on construit séparemment les fonctions d'utilité et la fonction d'agrégation.
- On commence générallement à construire les fonctions d'utilité en premier.
- On ne connaît pas alors les valeurs des poids de la fonction d'agrégation.
- Cela demande donc de construire les fonctions d'utilité sans connaître la fonction d'agrégation.
- ***Il est d'usage de construire les fonctions d'utilité sans se préoccuper de la fonction d'agrégation***.
- Cela est tout à fait justifier lorsque F est une somme pondérée
  - ▷ La propriété d'indépendance préférentielle implique que l'on peut isoler chaque critère indépendemment des autres.
- Ceci n'est plus satisfait avec une fonction F affine par morceaux.
- ***Il ne faut donc pas construire les fonctions d'utilité sans se préoccuper de la fonction d'agrégation***.

Construction de la fonction d'utilité

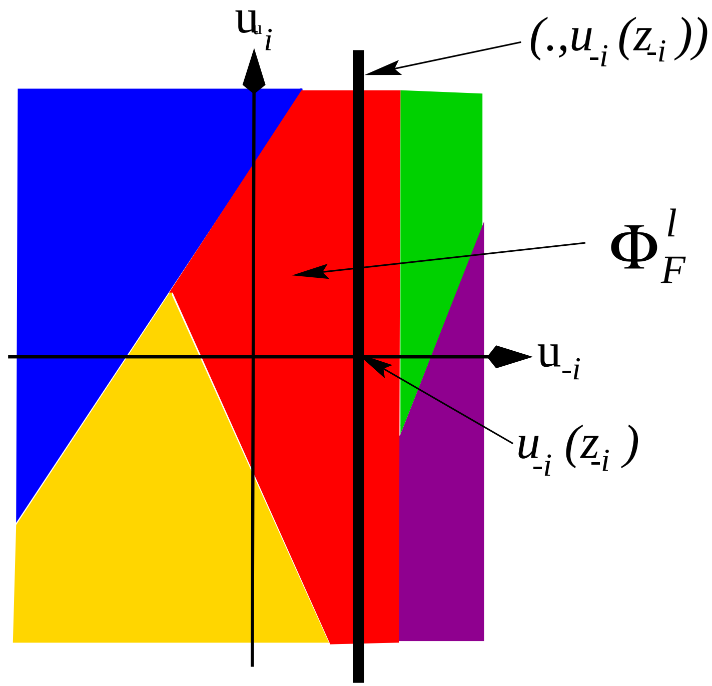
La notion de fonction d'utilité n'a pas de sens pour le décideur en dehors de toute fonction d'agrégation.

- Il faut construire u_i au travers de $\succeq$.
- Par questionnement de l'expert sur $\succeq$, on peut construire $u(x_i, z_{-i})$ pour un certain $z_{-i} \in X_{-i}$.
- On a $u(x_i, z_{-i}) = F(u_i(x_i), u_{-i}(z_{-i}))$.
- Or on ne connaît pas encore la fonction F, ni u_{-i}.
- Pourtant, si on sait par avance que

$$F(u_i(x_i), u_{-i}(z_{-i})) = \alpha\, u_i(x_i) + \beta \quad (\alpha > 0)$$

  (deux échelles d'intervalle équivalentes) alors on pourra déduire $u_i(x_i)$ de $u(x_i, z_{-i})$ (voir plus loin).
- Cette relation implique que

$$\exists l \in \{1, \ldots, \phi(F)\} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i, u_{-i}(z_{-i})) \in \Phi_F^l \;\; (1)$$



Construction de la fonction d'utilité

- Cette relation (1) est satisfaite pour tout z_{-i} s.s.i. F est une somme pondérée.

  Dans ce cas:

  ▷ Cela n'a aucune influence de choisir un z_{-i} particulier.

  ▷ On peut donc construire u_i sans faire référence à un z_{-i}.

  ▷ Cela correspond à l'hypothèse ***"toute chose étant égale par ailleurs"*** (***"Ceteris Paribus"***).

- Mais, dans le cas général, comment vérifier (1) puisque cela demande de connaître $u_{-i}(z_{-i})$?

  Solution: Fixer z_{-i} à un élément de référence, par exemple $\mathbf{0}_{-i}$.

  (1) devient $\qquad \exists l \in \{1, \ldots, \phi(F)\} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i, 0_{-i}) \in \Phi_F^l$.

- Si (1) est satisfaite pour le vecteur $z_{-i} = \mathbf{0}_{-i}$, alors on peut fixer les valeurs de α et β en utilisant deux niveaux de référence, par exemple $\mathbf{0}_i$ et $\mathbf{1}_i$:

$$u_i(x_i) = \frac{u(x_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i})}{u(\mathbf{1}_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i})}$$

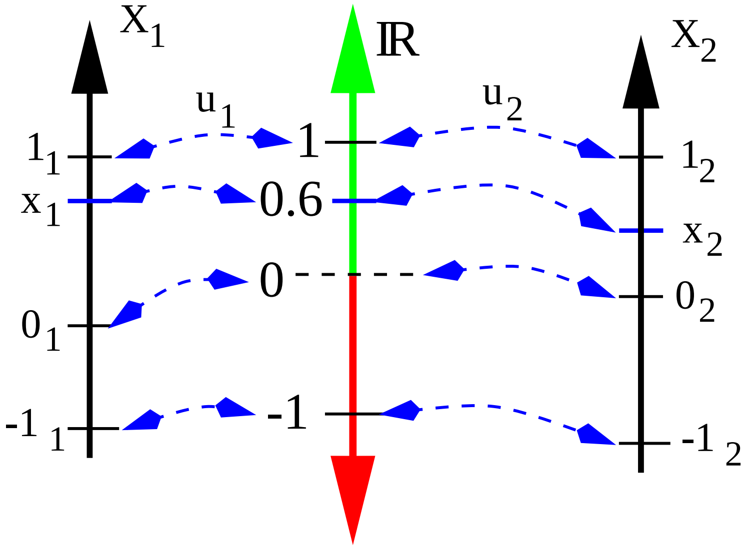
Construction de la fonction d'utilité

Ces fonctions d'utilité sont commensurables.

▷ À partir de $\succeq$ et un questionnement sur les écarts d'intensité de préférence, on obtient u_i à une transformation affine près (voir (1)).

▷ L'échelle u_i est complétement fixée par l'identification dans X_i de deux niveaux de référence dont la signification dépasse le point de vue i.

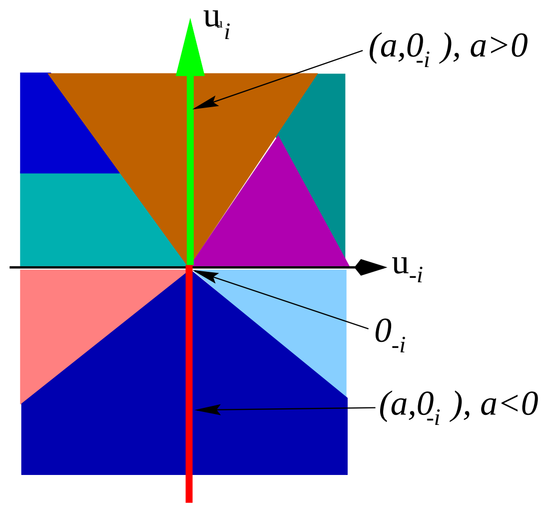
▷ On a choisi les deux niveaux $\mathbf{0}_i$ et $\mathbf{1}_i$.



Construction de la fonction d'utilité

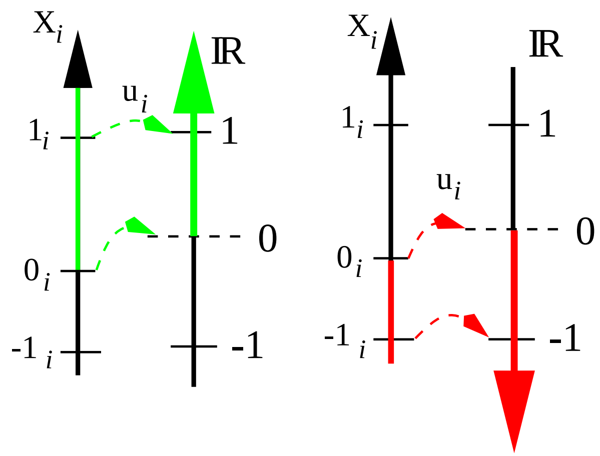
- (1) peut ne jamais être satisfaite (car englobant les aspects positifs et négatifs en même temps).
- Il est d'ailleurs plus opportun de séparer les stimulis de valeur positive et négative [Solvic et al '02].
- On construit donc séparemment les parties positives et négatives de l'échelle.
- Partie positive.
  - ▷ (1) devient: $\exists l \in \{1, \ldots, \phi(F)\}$
    $\forall a_i \in \mathbb{R}_+ \quad (a_i, 0_{-i}) \in \Phi_F^l.$
  - ▷ On se base sur les niveaux $\mathbf{0}_i$ et $\mathbf{1}_i$. Pour x_i attractif:

$$u_i(x_i) = \frac{u(x_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i})}{u(\mathbf{1}_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i})}$$



- Partie négative.
  - ▷ (1) devient: $\exists l \in \{1, \ldots, \phi(F)\}$
    $\forall a_i \in \mathbb{R}_- \quad (a_i, 0_{-i}) \in \Phi_F^l.$
  - ▷ On se base sur les niveaux $\mathbf{0}_i$ et $-\mathbf{1}_i$. Pour x_i répulsif:

$$u_i(x_i) = \frac{u(x_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i})}{u(\mathbf{0}_i, \mathbf{0}_{-i}) - u(-\mathbf{1}_i, \mathbf{0}_{-i})}$$



Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- **L'intégrale de Choquet bipolaire**
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

L'intégrale de Choquet bipolaire

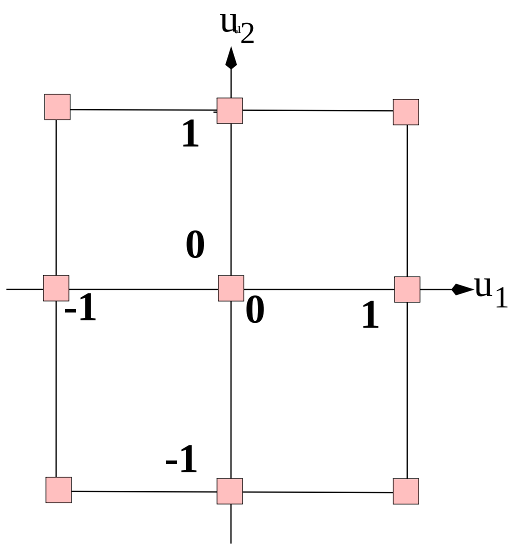
Propriétés souhaitables de la fonction d'agrégation F:

- F est **affine par morceaux**.
- F est **continu**: *En modifiant à peine la valeur d'un critère, on ne doit pas changer beaucoup l'évaluation globale.*
- F est **croissante**: *Améliorer un critère sans toucher au reste ne peut qu'améliorer globalement la satisfaction globale.*
- F est **idempotente**: $F(a, \ldots, a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. *Une action ayant la même évaluation suivant tous les critères devrait avoir comme évaluation globale ce score* (**Commensurabilité**).

Remarque:

- Vecteurs remarquables dans $\mathbb{R}^n$: Vecteurs ternaires $\{-1, 0, 1\}^n$.

  Le score suivant chaque critère correspond à l'un des trois niveaux de référence $-\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$.



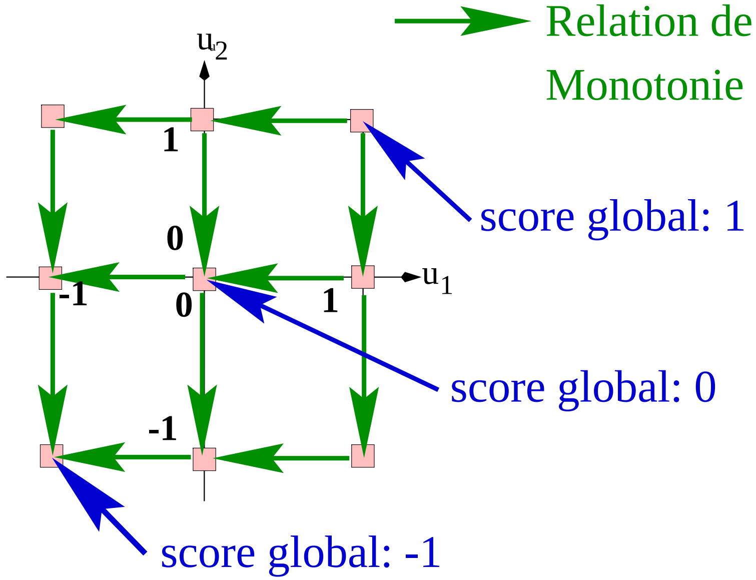
- Ces vecteurs parlent à un décideur (cf. Théorie du Signe).

L'intégrale de Choquet bipolaire

- Supposons que l'on connaisse F pour tous les vecteurs ternaires.
- La restriction de F sur les vecteurs $\{-1, 0, 1\}^n$ est appelée une **bi-capacité**.
- ***Connaître F partout devient alors un problème d'interpolation.***

Condition sur une bi-Capacité:

- On encode $a \in \{-1, 0, 1\}^n$ par une bi-coalition (S, T)
  - ▷ $S = \{i \in N\ ,\ a_i = 1\}$, $T = \{i \in N\ ,\ a_i = -1\}$
  - ▷ On a alors $a = (1_S, -1_T, 0_{-S\cup T})$.
- Idempotence: $F(-1, \ldots, -1) = -1$, $F(0, \ldots, 0) = 0$ et $F(1, \ldots, 1) = 1$.
- Croissance:
  - ▷ $S \subseteq S'$ induit
    $F(1_S, -1_T, 0_{-S\cup T}) \leq F(1_{S'}, -1_T, 0_{-S'\cup T})$.
  - ▷ $T \subseteq T'$ induit
    $F(1_S, -1_T, 0_{-S\cup T}) \geq F(1_S, -1_{T'}, 0_{-S\cup T'})$.

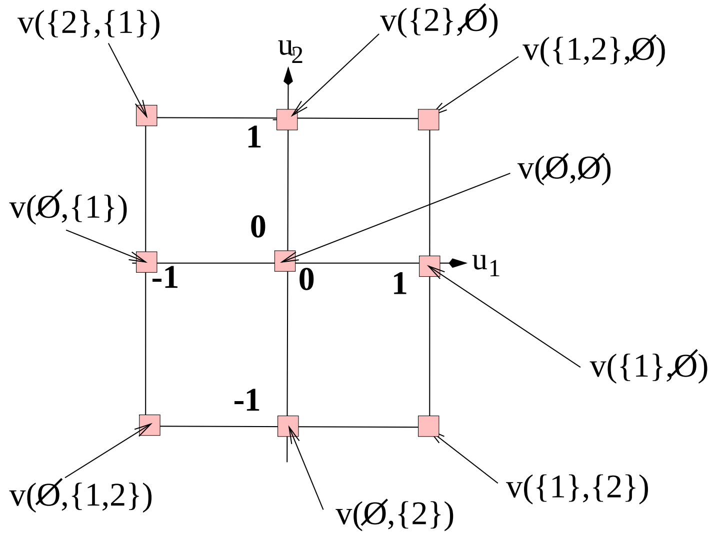


	S	$S' \setminus S$	T	$-S' \cup T$
a	1	0	-1	0
a'	1	1	-1	0

	S	T	$T' \setminus T$	$-S \cup T'$
b	1	-1	0	0
b'	1	-1	-1	0

L'intégrale de Choquet bipolaire

- Soit $\mathcal{Q}(N) = \{(S,T) \in 2^N \times 2^N \mid S \cap T = \emptyset\}$.
- Une **bi-capacité** est une fonction v de $\mathcal{Q}(N)$ dans $\mathbb{R}$ telle que
  - ▷ $v(\emptyset, N) = -1$, $v(\emptyset,\emptyset) = 0$, $v(N,\emptyset) = 1$.
  - ▷ $S \subseteq S'$ implique que $v(S,T) \leq v(S',T)$
  - ▷ $T \subseteq T'$ implique que $v(S,T) \geq v(S,T')$



Contraintes sur F:

- F doit s'identifier à v sur les sommets $\{-1,0,1\}^n$

$$F(1_S, -1_T, 0_{-S\cup T}) = v(S,T)$$

- F est continue, monotone et idempotente.

L'intégrale de Choquet bipolaire

Interpolation:

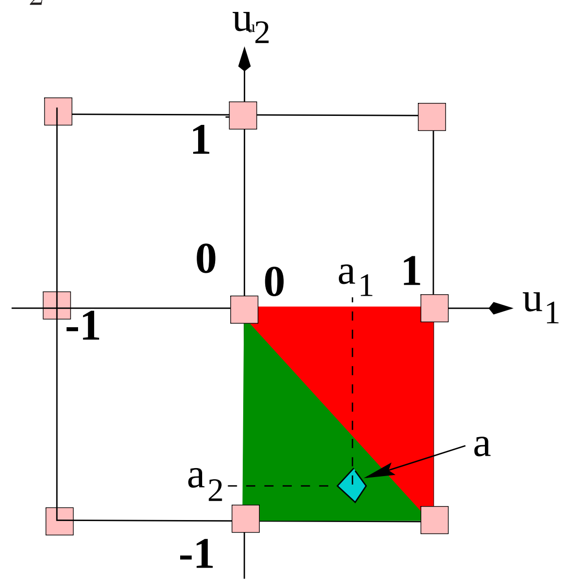
- F est une interpolation entre les sommets $\{-1, 0, 1\}^n$.
- Chaque élément Φ_F^l de la partition $\Phi(F)$ doit correspondre à la fermeture convexe d'un ensemble de sommets de $\{-1, 0, 1\}^n$.
- On cherche à obtenir des interpolations sur le plus petit nombre de sommets.
  - ▷ Le décideur maîtrise ainsi mieux le résultat de F.
  - ▷ Le nombre minimum est $n + 1$.
- Les $n + 1$ sommets entourant Φ_F^l correspondent aux bi-coalitions $(S^{l,1}, T^{l,1}), \ldots, (S^{l,n+1}, T^{l,n+1})$.
- Pour $a \in \Phi_F^l$

$$F(a) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l,k} \, a_i \right) \, v(S^{l,k}, T^{l,k})$$

L'intégrale de Choquet bipolaire

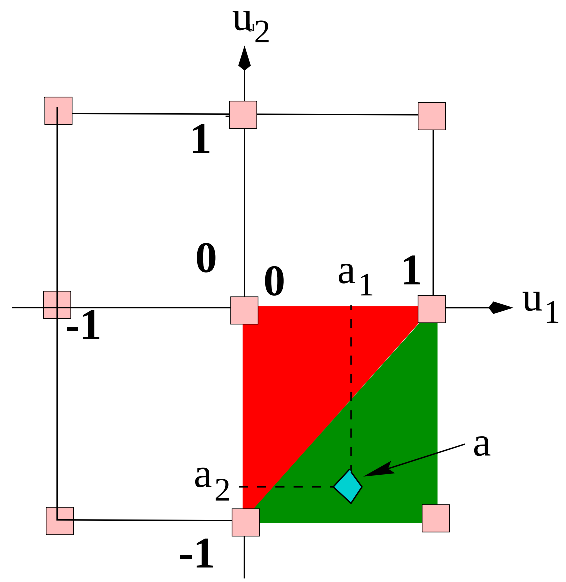
Exemple $n = 2$. Soit $a \in [-1, 1]^2$ avec $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < -a_2$ et $a_1 - a_2 > 1$.

<u>Première partition:</u>



- $F(a) = (\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2)\, v(\{1\}, \{2\}) + (\beta_1\, a_1 + \beta_2\, a_2)\, v(\emptyset, \{2\})$
- Comme $F(1_1, -1_2) = v(\{1\}, \{2\})$, il vient $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ et $\beta_1 = \beta_2$.
- Comme $F(0_1, -1_2) = v(\emptyset, \{2\})$, il vient $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = -1$.
- Donc $F(a) = a_1\, v(\{1\}, \{2\}) + (|a_2| - a_1)\, v(\emptyset, \{2\})$
- **Cette partition convient**.

<u>Seconde partition:</u>



- $F(a) = (\alpha'_1\, a_1 + \alpha'_2\, a_2)\, v(\{1\}, \emptyset) + (\beta'_1\, a_1 + \beta'_2\, a_2)\, v(\emptyset, \{2\}) + (\gamma'_1\, a_1 + \gamma'_2\, a_2)\, v(\{1\}, \{2\})$
- Comme $F(1_1, 0_2) = v(\{1\}, \emptyset)$, il vient $\alpha'_1 = 1$ et $\beta'_1 = \gamma'_1 = 0$.
- Comme $F(0_1, -1_2) = v(\emptyset, \{2\})$, il vient $\alpha'_2 = \gamma'_2 = 0$ et $\beta'_2 = -1$.
- Comme $\gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$, on ne peut pas avoir $F(1_1, -1_2) = v(\{1\}, \{2\})$.
- **Cette partition ne convient pas**.

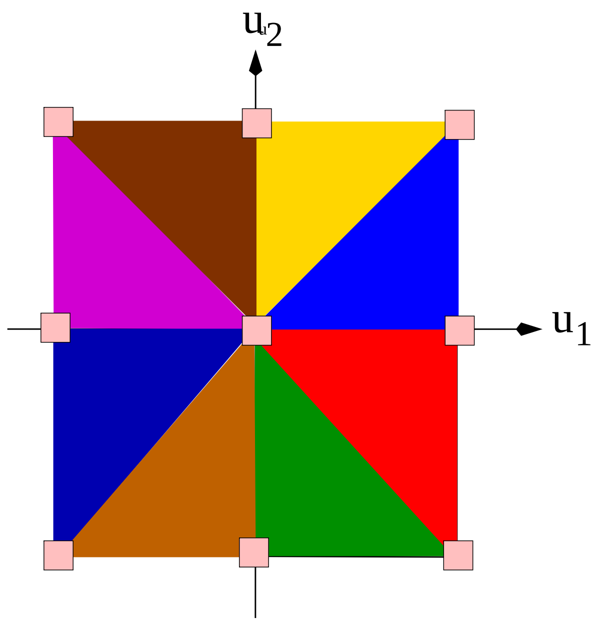
L'intégrale de Choquet bipolaire

De manière plus générale, ***il n'existe qu'une seule partition de $[-1,1]^n$ composée d'éléments comportant $n+1$ vecteurs binaires comme sommets, telle que la fonction d'interpolation associée satisfasse aux contraintes précédentes*** [Grabisch '04].

- Il y a $2^n \times n!$ éléments dans $\Phi(F)$.
- Pour $\phi_F^l \in \Phi(F)$, il existe $S \subseteq N$ et une permutation τ sur N tel que

  $$\phi_F^l = \left\{a \in [-1,1]^n\ ,\ a_S \geq 0\ ,\ a_{-S} \leq 0\ ,\ |a_{\tau(1)}| \leq \cdots \leq |a_{\tau(n)}|\right\}$$

  Tous les ϕ_F^l ont l'origine $(0,\ldots,0)$ comme sommet.



- Pour tout $a \in \phi_F^l$ caractérisé par S et τ,

  $$F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(|a_{\tau(i)}| - |a_{\tau(i-1)}|\right)\ \mu_S(\{\tau(i),\ldots,\tau(n)\})$$

  où $\mu_S(T) = v(T \cap S, T \cap (N \setminus S))$.

- Il s'agit de **l'intégrale de Choquet bipolaire** [Grabisch, Labreuche '02].
- Remarque: On peut étendre l'expression de F à $\mathbb{R}^n$.

Plan

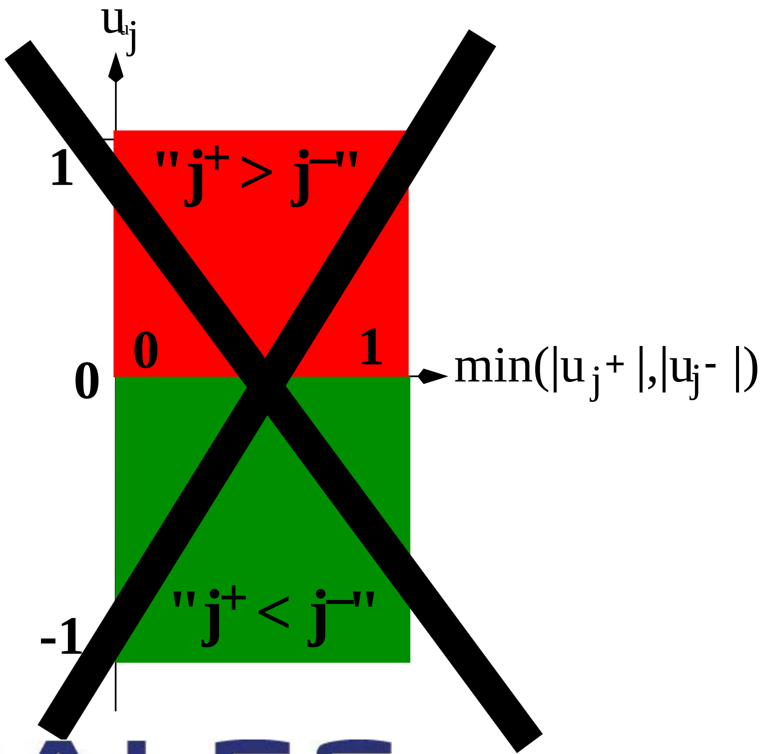
- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- **Application aux deux exemples**
- Détermination du niveau neutre
- Autres problèmes

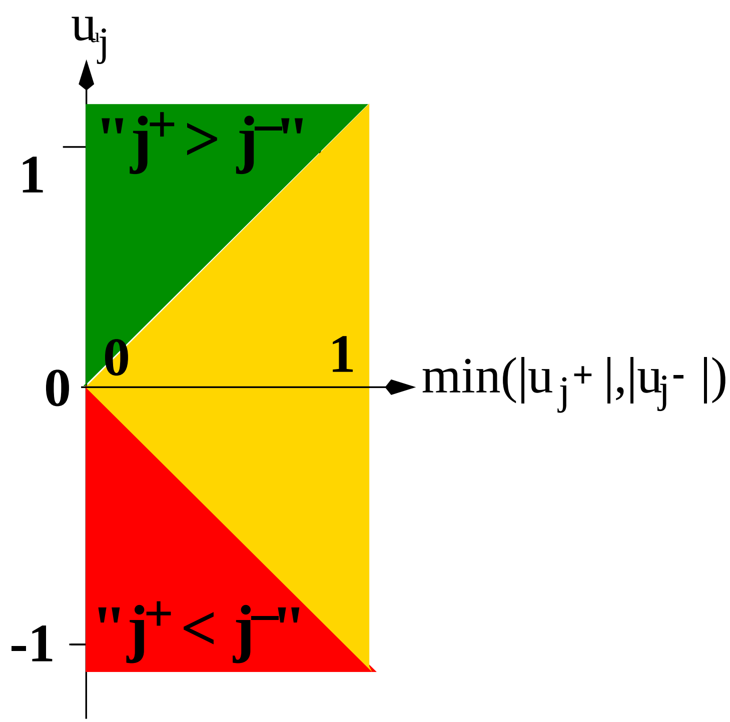
Application à l'exemple 1

Par application de la Règle $(\mathbf{R1})$, on voudrait pouvoir avoir une partition $\Phi(F)$ composée seulement de deux sous-ensembles.
Le résultat suivant montre que ce n'est pas possible.

Théorème 1 (Labreuche, Grabisch '06b) *Il n'existe pas de fonction F continue et affine par morceaux, pour laquelle $(\mathbf{R1})$ soit satisfaite lorsque le critère j est le plus proche du niveau neutre parmi les critères j, j^+, j^-.*

En fait, $\Phi(F)$ est composé au minimum de 3 sous-ensembles.





Application à l'exemple 1

Corollaire 1 *Si le critère j est le plus proche du niveau neutre parmi les critères j, j^+, j^-, alors le poids des critères j^- et j^+ ne peut pas être conditionnel au fait que le critère j soit attractif ou répulsif.*

> $(\mathbf{R2})$: Si la valeur du critère j est attractive (> 0), et j n'est pas le plus proche du niveau neutre parmi les critères j, j^+, j^-, alors le critère j^+ est plus important que le critère j^-.
>
> Si la valeur du critère j est répulsive (< 0), et j n'est pas le plus proche du niveau neutre parmi les critères j, j^+, j^-, alors le critère j^+ est moins important que le critère j^-.

- Il n'existe pas de somme pondérée satisfaisant à cette propritété.
- Il n'existe pas d'intégrale de Choquet satisfaisant à cette propritété.

Lemme 1 *Il existe une bi-capacité telle que l'intégrale de Choquet bipolaire associée satisfait à $(\mathbf{R2})$.*

Application à l'exemple 2

Si les critères F sont mal-satisfaits, alors ils se comportent comme un veto.

Si les critères F est bien-satisfait, alors il y a compensation entre F et NF.

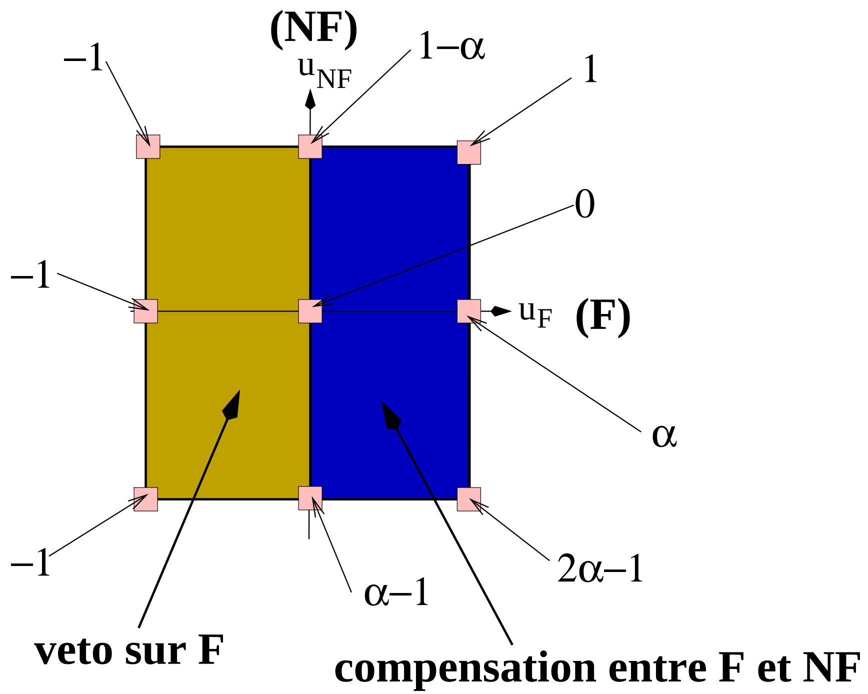
- Il n'existe pas de somme pondérée satisfaisant à cette propritété.
- Il n'existe pas d'intégrale de Choquet satisfaisant à cette propritété.

- On regroupe les critères fonctionnels en x_F et les critères non fonctionnels en x_{NF}.
- Si $u_F < 0$, alors F est un veto:

$$F(u_F, u_{NF}) \leq u_F \ .$$

- Si $u_F > 0$, alors F est une simple somme pondérée:

$$F(u_F, u_{NF}) = \alpha\, u_F + (1-\alpha)\, u_{NF} \ .$$



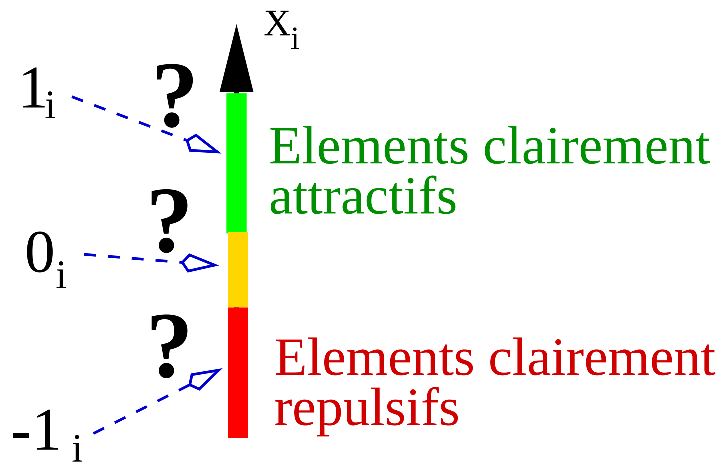
Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- **Détermination du niveau neutre**
- Autres problèmes

Détermination du niveau neutre

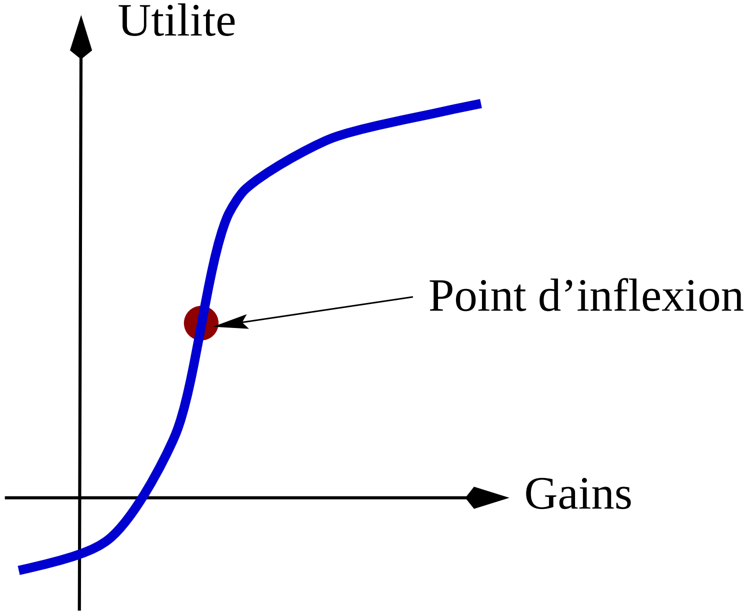
Les niveaux de référence -1_i, 0_i et 1_i sont parfois inaccessibles!

- Dans X_i, le décideur sait identifier les éléments clairement attractifs X_i^{++} et les éléments clairement répulsifs X_i^{--}.
- Mais il n'arrive pas à donner une valeur aux trois niveaux.



En décision dans le risque:

- Une même fonction d'utilité pour toutes les conséquences, déterminée par questionnement du décideur autour de l'équivalent certain.
- Le niveau neutre parfois calculé a posteriori.
- La fonction d'utilité a souvent une forme en S.
- Le niveau neutre correspond alors au point d'inflexion de cette courbe.



Détermination du niveau neutre

Idée: Si ses préférences exhibent des comportements bipolaires,
alors on pourra s'en servir pour déterminer le niveau neutre

Approche pragmatique:

- On doit forcément diposer de niveaux de référence pour construire des fonctions d'utilité commensurables!

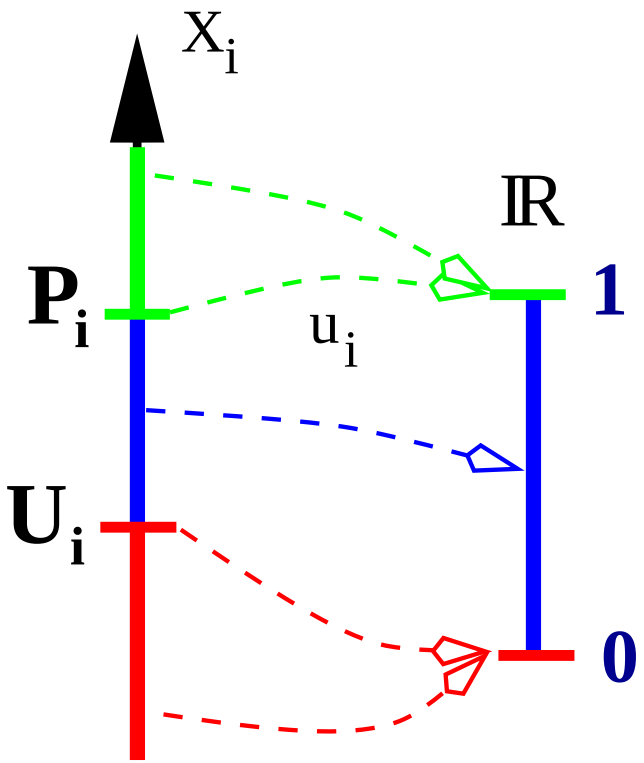
- On peut supposer disposer des deux niveaux de référence classiquement utilisés pour les échelles unipolaires bornées.

- Après tout une échelle unipolaire bornées peut parfois être vue comme une échelle bipolaire.

  Exemple: Les *uninormes* sont des opérateurs bipolaires (utilisant T-normes et T-conormes) dans $[0,1]^2$ autour d'un élément neutre appelé **cross-over** $\gamma \in (0,1)$.

- $\mathbf{U}_i$: élément de X_i jugé inacceptable.

- $\mathbf{P}_i$: élément de X_i jugé parfaitement satisfaisant.

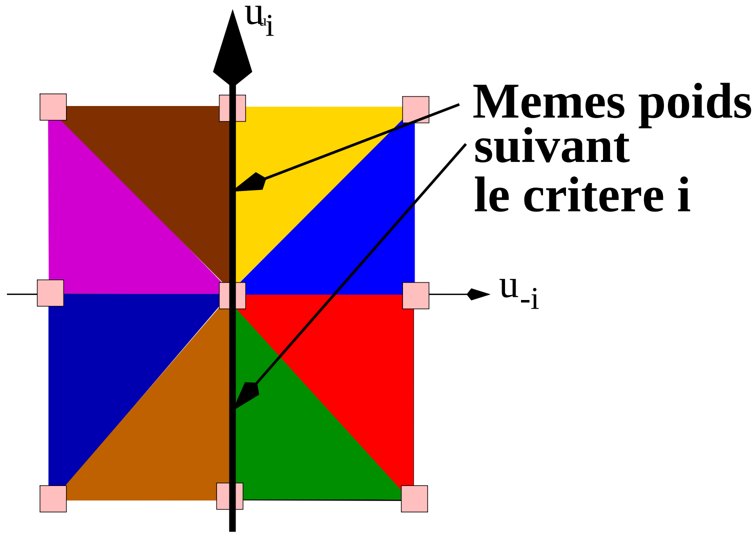


Détermination du niveau neutre

- On construit une fonction d'utilité $u_i^\star$ sur échelle unipolaire bornée à partir des niveaux $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{P}_i$.
- On pose la normalisation: $u_i^\star(\mathbf{U}_i) = 0$ et $u_i^\star(\mathbf{P}_i) = 1$.
- On construit une échelle d'intervalle U sur les actions $(x_i, \mathbf{P}_{-i})$.
- On a $u_i^\star(x_i) = \dfrac{U(x_i, \mathbf{P}_{-i}) - U(\mathbf{U}_i, \mathbf{P}_{-i})}{U(\mathbf{P}_N) - U(\mathbf{U}_i, \mathbf{P}_{-i})}$.
- Les niveaux $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_n$ sont commensurables et idem pour $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$.
- Donc la différence entre $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{P}_i$ procure la même satisfaction, quel que soit i.
- On veut construire u_i tel que $u_i(\mathbf{0}_i) = 0$ et $u_i(\mathbf{P}_i) - u_i(\mathbf{U}_i) = u_i^\star(\mathbf{P}_i) - u_i^\star(\mathbf{U}_i) = 1$.
- On a vu que construire la fonction d'utilité conjointement sur les parties positives et négatives est fondé si il existe α et β tels que

  $$\forall a_i \in \mathbb{R} \qquad F(a_i, 0_{\underset{i}{}}) = \alpha\, a_i + \beta.$$

- Cela signifie que le critère i a le même poids $w_i(a_i, a_{-i})$ quelque soit le signe de a_{-i}.



Détermination du niveau neutre

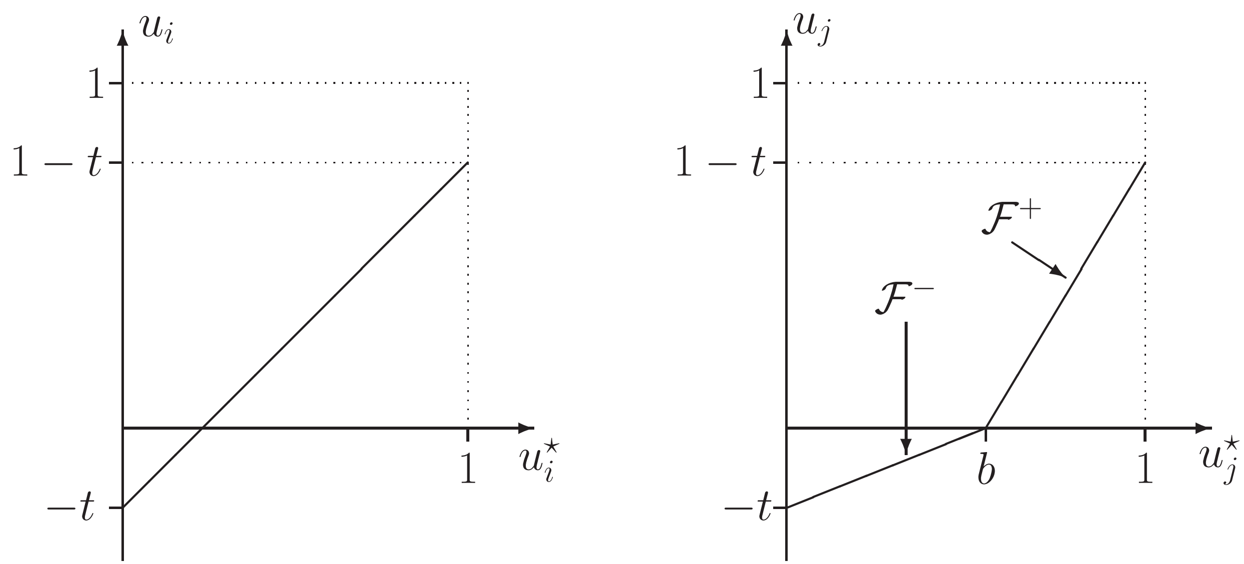
- On suppose que pour tout $i \neq j$, la perception de u_i au travers de U n'est pas déformée:

$$\forall x_i \in X_i \ , \quad U(x_i, \mathbf{P}_{-i}) = a_i \, u_i(x_i) + b_i$$

- On suppose que la perception de u_j au travers de U est déformée:

$$\begin{cases} \forall x_j \succeq_j \mathbf{0}_j \ , \quad U(x_j, \mathbf{P}_{-j}) = a'_j \, u_j(x_j) + b'_j \\ \forall x_j \preceq_j \mathbf{0}_j \ , \quad U(x_j, \mathbf{P}_{-j}) = a''_j \, u_j(x_j) + b''_j \end{cases}$$

- La transformation de $u_i^\star$ en u_i est donc la suivante [Labreuche, Grabisch '06b].



Détermination du niveau neutre

- Il faut donc déterminer t et b.
- La présence de b implique que $u_j^\star$ et les u_i (pour $i \neq j$) ne sont pas commensurables (hormis en $\mathbf{U}$ et $\mathbf{P}$).
- Le problème à résoudre est donc de rendre commensurables les échelles à partir de la relation de préférence globale.
- On sait que cela n'est pas possible sans information a priori.
- Mais on sait que, d'après la Règle $(\mathbf{R2})$, une différence de comportement intervient lorsque j passe de attractif à répulsif.
- On va utiliser cela pour déterminer le niveau neutre.

Question Q1(x). Si la valeur de l'action x pouvait être améliorée suivant soit le critère j^+ soit le critère j^-, lequel de ces critères choisisseriez-vous?

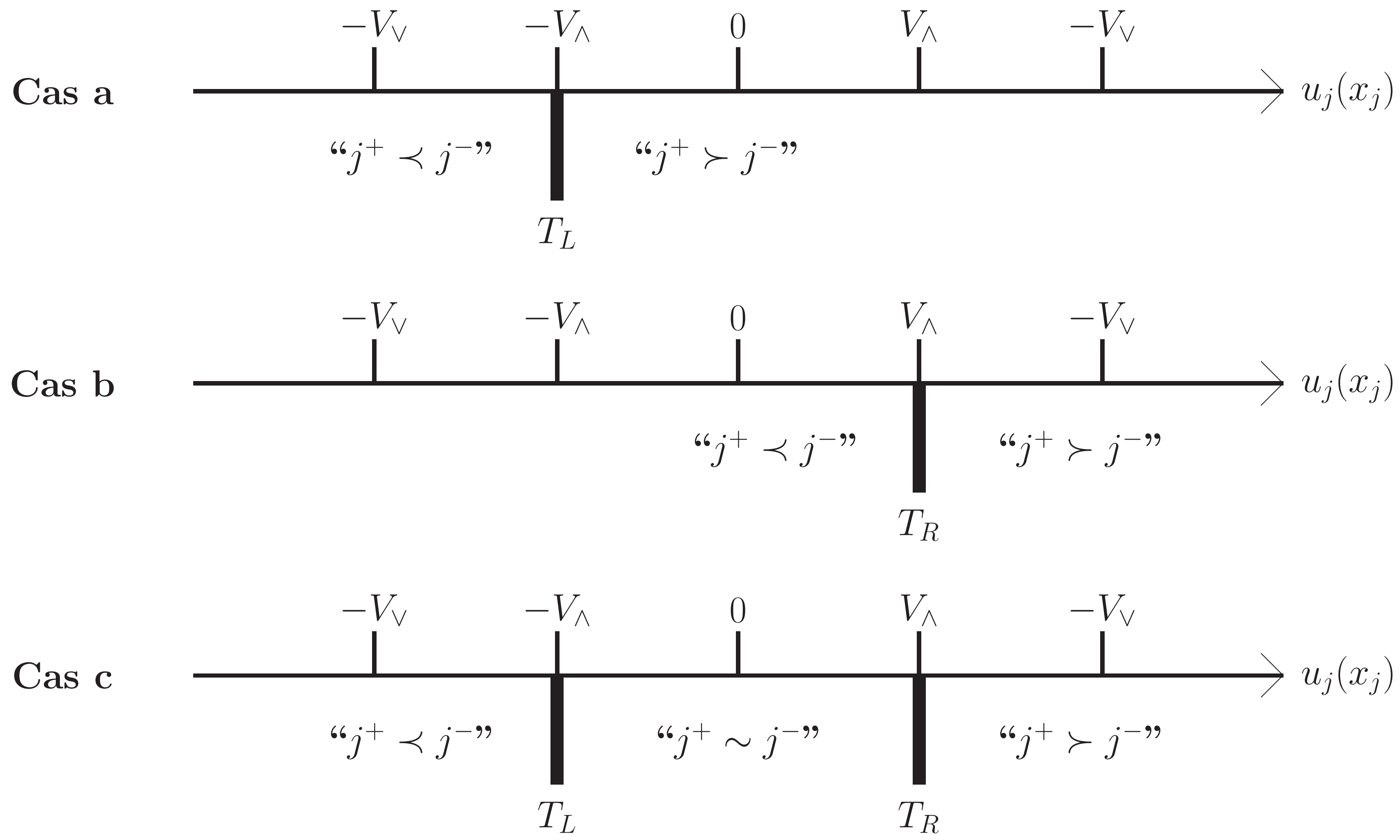
▷ "$j^+ \succ j^-$": Je préfère améliorer le critère j^+.

▷ "$j^+ \prec j^-$": Je préfère améliorer le critère j^-.

▷ "$j^+ \sim j^-$": Je n'ai pas de préfèrence entre j^+ et j^-.

Détermination du niveau neutre

Sous l'hypothèse de la règle $(\mathbf{R2})$, on a d'après le Théorème 1, l'un des trois cas suivants:



Notations: $V_\wedge = \min\left(\left|u_{j^+}(x_{j^+})\right|, \left|u_{j^-}(x_{j^-})\right|\right)$, $V_\vee = \max\left(\left|u_{j^+}(x_{j^+})\right|, \left|u_{j^-}(x_{j^-})\right|\right)$.

Détermination du niveau neutre

- Soit $x_{j^+} \in X_{j^+}^{++}$ et $x_{j^-} \in X_{j^-}^{++}$ tels que $u_{j^+}^\star(x_{j^+}) \leq u_{j^-}^\star(x_{j^-})$.
- Les échelles $u_{j^+}^\star$ et $u_{j^-}^\star$ sont commensurables.
- Alors $u_{j^-}(x_{j^-}) \geq u_{j^+}(x_{j^+}) \geq 0$.
- Donc $V_\wedge = u_{j^+}^\star(x_{j^+}) - t$ et $V_\vee = u_{j^-}^\star(x_{j^-}) - t$.
- Par dichotomie, on pose au décideur les questions Q1(x) en faisant varier x_j.

  Ceci permet de déterminer dans quel cas (parmi a, b et c) on se situe, et de déterminer la valeur suivant x_j de la (des) transition(s).
- Si on a deux transitions $x_J^{T_L}$ et $x_j^{T_R}$, on sait que

$$\mathcal{F}^-(u_j^\star(x_j^{T_L})) = T_L = -V_\wedge = -u_{j^+}^\star(x_{j^+}) + t$$
$$\mathcal{F}^+(u_j^\star(x_j^{T_R})) = T_R = V_\wedge = u_{j^+}^\star(x_{j^+}) - t$$

  On sait que $x_J^{T_L}$ est attractif et $x_j^{T_R}$ est répulsif.

  On a donc un système de deux équations à deux inconnues (t et b) qui admet une unique solution.

Détermination du niveau neutre

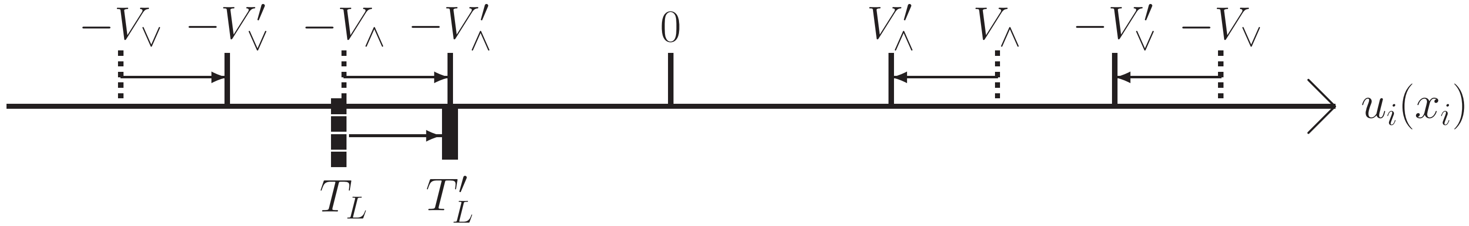
- Si on a une seule transition x_j^T, on ne sait pas forcément si cela correspond à la transition de gauche (x_j^T est alors répulsif) ou de droite (x_j^T est alors attractif).
- Soit $x_{j^+} \in X_{j^+}^{++}$ et $x_{j^-} \in X_{j^-}^{++}$ tel que $V'_\wedge < V_\wedge$ et $V'_\vee < V_\vee$.
- La nouvelle transition est $x_j^{T'}$. Deux cas:
  - ▷ Si $u_j(x_j^{T'}) > u_j(x_j^T)$, il s'agit de la transition de gauche

$$\mathcal{F}^-(u_j^\star(x_j^T)) = T_L = -V_\wedge = -u_{j^+}^\star(x_{j^+}) + t$$

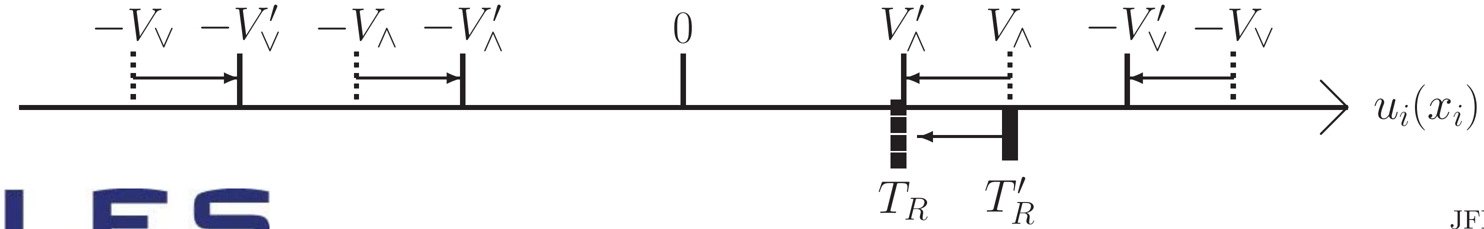
  - ▷ Si $u_j(x_j^{T'}) < u_j(x_j^T)$, il s'agit de la transition de droite

$$\mathcal{F}^+(u_j^\star(x_j^T)) = T_R = V_\wedge = u_{j^+}^\star(x_{j^+}) - t$$

Cas a



Cas b



Détermination du niveau neutre

- On peut reproduire le même raisonnement pour $x_{j^+} \in X_{j^+}^{--}$ et $x_{j^-} \in X_{j^-}^{--}$.
- On peut montrer que cela spécifie b et t de manière unique dans tous les cas sauf lorsque $b = t$.
- Ce cas correspond au cas où la perception de u_j au travers de U n'est pas en fait déformée.
- Dans ce cas, on a un algorithme dédié permettant de calculer t.

Plan

- Points de réflexion du décideur
- Exemple d'interaction bipolaire entre critères
- Choix du type d'échelle associée à X_i
- Construction de la fonction d'utilité
- L'intégrale de Choquet bipolaire
- Application aux deux exemples
- Détermination du niveau neutre
- **Autres problèmes**

Indice d'importance moyen

- Une bi-capacité contient 3^n termes. Cela rend sa compréhension très ardue pour un décideur.
- On cherche alors un indice d'importance $\phi_i(v)$ du critère i tel que $\phi_i(v) \geq \phi_j(v)$ signifie que le critère i est en moyenne plus important que le critère j.
- 3 approches possibles :
  - ▷ Approche multicritère: v_i est vu comme la valeur moyenne du poids $w_i(a)$ dans $[-1,1]^n$ [Kojadinovic '06]
  - ▷ Approche théorie des jeux: Le problème est vu comme un problème de répartition d'une somme d'argent entre joueurs coopérant ensemble.
    - □ Approche jeux coopératifs: On cherche un mécanisme de partage équitable entre joueurs par une approche axiomatique [Labreuche, Grabisch '06].
    - □ Approche jeux non-coopératifs: On définit un protocol de marchandage dans lequel les joueurs doivent se mettent d'accord sur la répartition. On cherche alors les équilibres parfaits par sous-jeux de ce jeux non-coopératif [Labreuche '06].
- Ces 3 approches amènent à la même expression de v.

$$\phi_i(v) = \sum_{(S,T)\in\mathcal{Q}(N\setminus\{i\})} \frac{(|S|+|T|)!(n-|S|-|T|-1)!}{2^{|S|+|T|}\,n!} \left(v(S\cup\{i\},T) - v(S,T\cup\{i\})\right)$$

Bi-capacité simplifiée

- Une bi-capacité contient 3^n termes.
- Cela amène une complexité très importante pour sa détermination.
- On introduit de la bipolarité et des variables suppémentaires uniformément suivant tous les critères.
- Sur la plupart des critères, les stratégies de décision ne sont pas conditionnelles à l'attractivité / répulsivité.
- P: critères pour lequels la bipolarité est nécessaire.
- Soit $\Delta_{\{i\},\{j\}} v(S,T) = v(S \cup \{i\}, T \cup \{j\}) - v(S \cup \{i\}, T) - v(S, T \cup \{i\}) + v(S,T)$
- On impose $\Delta_{\{i\},\{j\}} v(S,T) = 0$ pour tout $(S,T) \in \mathcal{Q}(N \setminus \{i,j\})$ et tout $\{i,j\} \subset N \setminus P$.
- La complexité de v passe alors de 3^n à $3^{n-p} \times \left(2^{p+1} - 1\right)$ [Labreuche, Grabisch '04].

model	complexity	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
Capacité	2^n	8	16	32	64	128
double capacité	2^{n+1}	16	32	64	128	256
Bi-Capacité avec $\|P\| = 1$	$3 \times (2^n - 1)$	21	45	93	183	381
Bi-Capacité	3^n	27	81	273	819	2457

Bibliographie

- [Grabisch '04] M. Grabisch. The Choquet integral as a linear interpolator. IPMU 2004, Perugia, Italy, pp. 373-378.
- [Grabisch, Labreuche '02] M. Grabisch, Ch. Labreuche. Bi-Capacities for decision making on bipolar scales. In: EUROFUSE Workshop on Information Systems, Varenna, Italy, September 2002.
- [Hsee 96] C. Hsee. The evaluation hypothesis: an explanation for preference reversals between joint and separate evaluations pf alternatives. Organizational Behavior and Human Decision Processes 67 (1996) 242-257.
- [Labreuche, Grabisch '04] C. Labreuche, M. Grabisch. Partially Symmetric Bi-Capacities in MCDM. SCIS Conference, Tsukuba, Japan, 2004.
- [Labreuche, Grabisch '06a] C. Labreuche, M. Grabisch. Generalized Choquet-like aggregation functions for handling bipolar scales. EJOR 172 (2006) 931-955.
- [Labreuche, Grabisch '06b] C. Labreuche, M. Grabisch. The representation of conditional relative importance between criteria. AOR, to appear.
- [Li, Slovic '03] S. Lin, P. Slovic. Sign theory: a non-extensional theory of preference. Working paper, 2003.
- [Simon '56] H. Simon. Rational choice and the structure of the environment. Psychological review 63 (1956) 129-138.
- [Slovic '02] P. Slovic, M. Finucane, E. Peters, D.G. MacGregor, The affect heuristic. in: T. Gilovitch, D. Griffin, D. Kahneman (Eds.), Heuristics and biases: the psychology of intuitive judgment, Cambridge University Press, 2002, pp. 397–420.