Routage, Allocations de Ressources et Équilibres.

Johanne Cohen

Johanne.Cohen@loria.fr

CNRS, Laboratoire LORIA, Nancy.

Jeu *“Ciseaux/Papier/Caillou”*.

Modalité: 2 joueurs doivent choisir entre *Ciseaux/Papier/Caillou*.

Forme stratégique:

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(1,1)$	$(0,2)$	$(2,0)$
Papier	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$
Caillou	$(0,2)$	$(2,0)$	$(1,1)$

- Ce jeu ne possède pas d’équilibre de Nash pur.
- Mais il possède un équilibre de Nash mixte.
  ($\forall i \in \{1,2\}\ p_i(Ciseaux) = p_i(Papier) = p_i(Caillou) = \frac{1}{3}$)

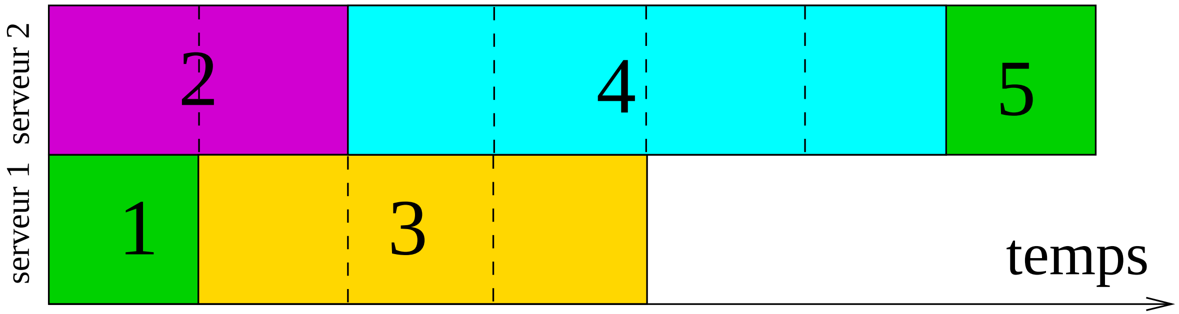
Plan

1. Définitions des jeux d'allocations + des jeux de congestions.
2. Existence et complexité des équilibres de Nash.
3. Prix de l'anarchie.

Problème d'allocations de tâches.

	m machines (serveurs),
Instance :	n tâches ayant pour tps d'exécution $\{w_1, \ldots, w_n\}$
	un ens. de choix S_j pour chaque tâche j.

Configuration: allocation des tâches sur les serveurs.



Charge L_i d'un serveur i: somme des tps d'exécution des tâches sur le serveur.

Problème d'allocations de tâches.

Un joueur i = la tâche i.

Stratégies pures: choix d'un serveur de S_i.ssss

Objectif de chaque joueur:

minimiser la charge du serveur l'hébergeant.

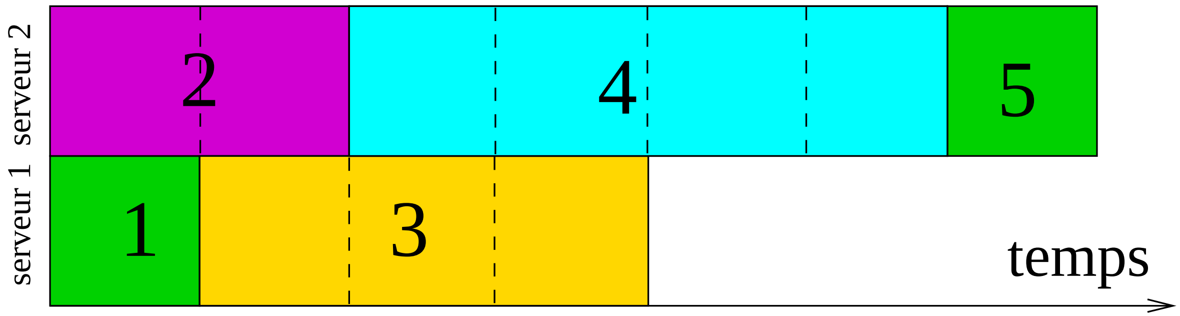
Équilibre de Nash pur:

Configuration où aucun joueur i n'a intérêt de modifier son placement j : $\forall k \in [1, \ldots, m], L_j \leq L_k + w_i$.

Exemple: allocations de tâches

2 serveurs, 5 tâches,

Une affectation:



$L_1 = 4$, $L_2 = 7$

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

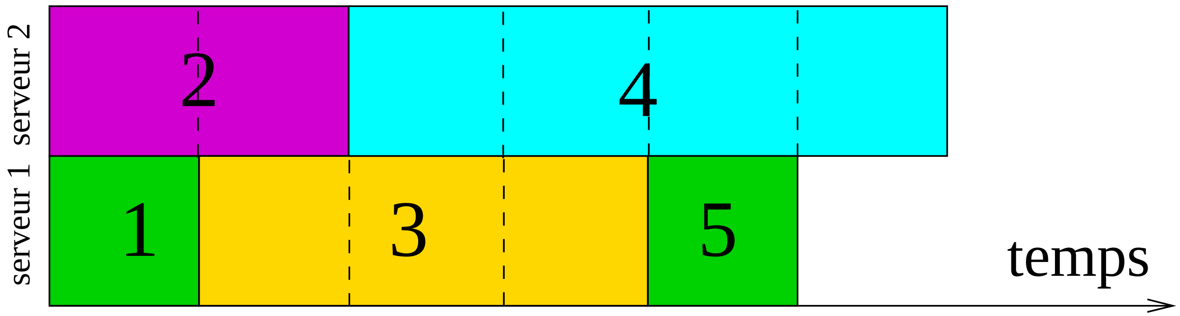
tâche	utilité
1	4
3	4

tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

Exemple: allocations de tâches

2 serveurs, 5 tâches,

Déplacement de 5:



$L_1 = 5$, $L_2 = 6$

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

tâche	utilité	tâche	utilité
1	5	2	6
3	5	4	6
5	5		

Problématique du routage (atomique)

Instance :

$G = (V, E)$ un graphe orienté,

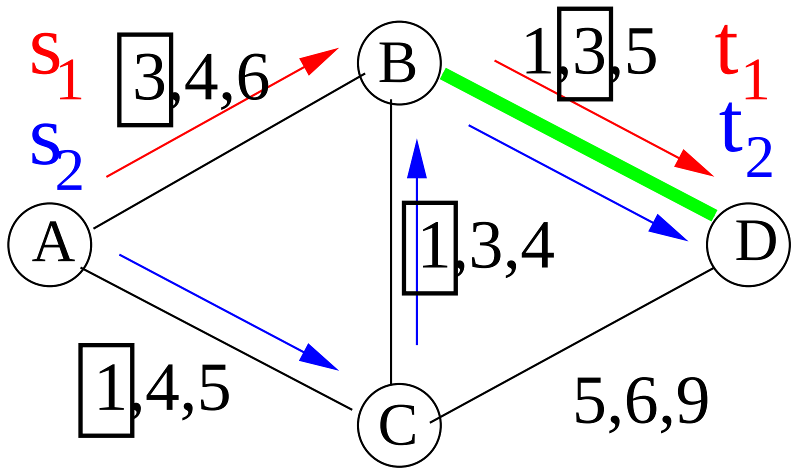
k couples $(s_i, t_i) \in V^2$, pour $i \in [1, \ldots, k]$

$d_e(x)$= coût de l'arête e si x chemins la traversent.

Objectif: Trouver k chemins P_i reliant s_i à t_i sachant le coût d'un chemin P est $\sum_{e \in P} d_e(f(e))$, où $f(e)$ est le nombre de chemins passant par e.

$$c(P_1) = 3 + 3 = 6$$

$$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$$



Jeu de congestions réseau

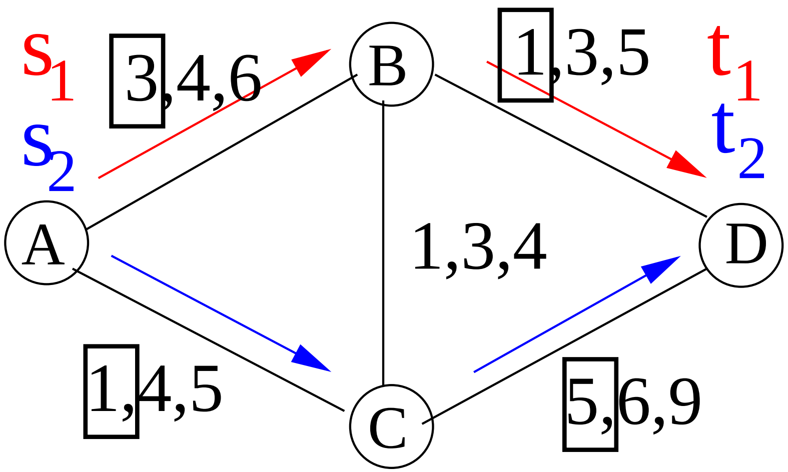
Jeu de congestions:

- Ensemble fini E de ressources,
- Fct non-décroissante d de coût: $d : E \times 1, \ldots, n \rightarrow Z$,
- Ensemble de stratégies S_i (sous-ensemble de E),
- Coût d'un joueur: $\sum_{e \in S_i} d_e(f_e(e))$.

Jeu de congestions réseau: (lié à la problématique du routage)

- Un joueur correspond à (s_i, t_i).
- Stratégies pures: chemins entre s_i et t_i.
- Objectif du joueur i: minimiser le coût de son chemin.

Exemple de jeux de congestions.

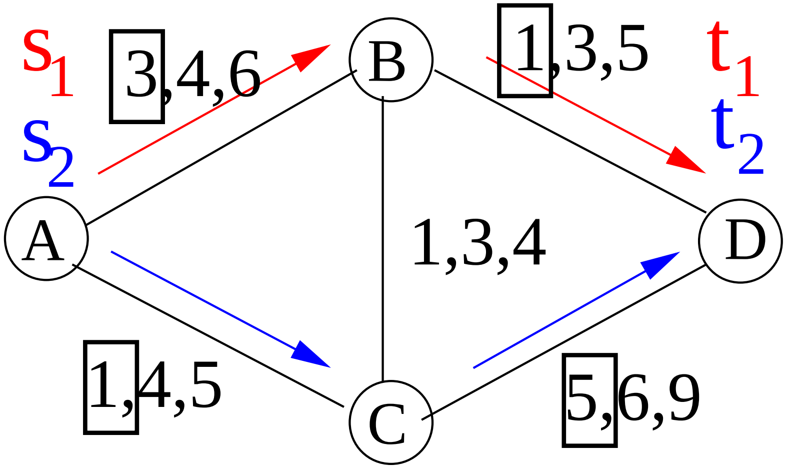


$c(P_1) = 3 + 1 = 4$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

N'est pas équilibre de Nash

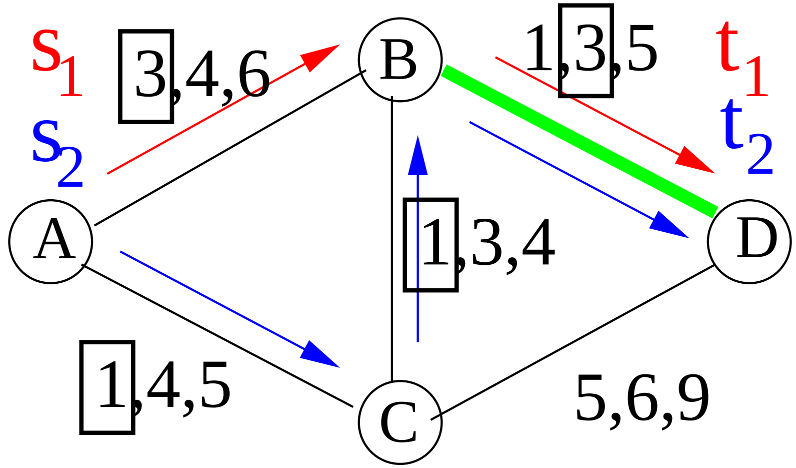
Exemple de jeux de congestions.



$c(P_1) = 3 + 1 = 4$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

N'est pas équilibre de Nash



$c(P_1) = 3 + 3 = 6$

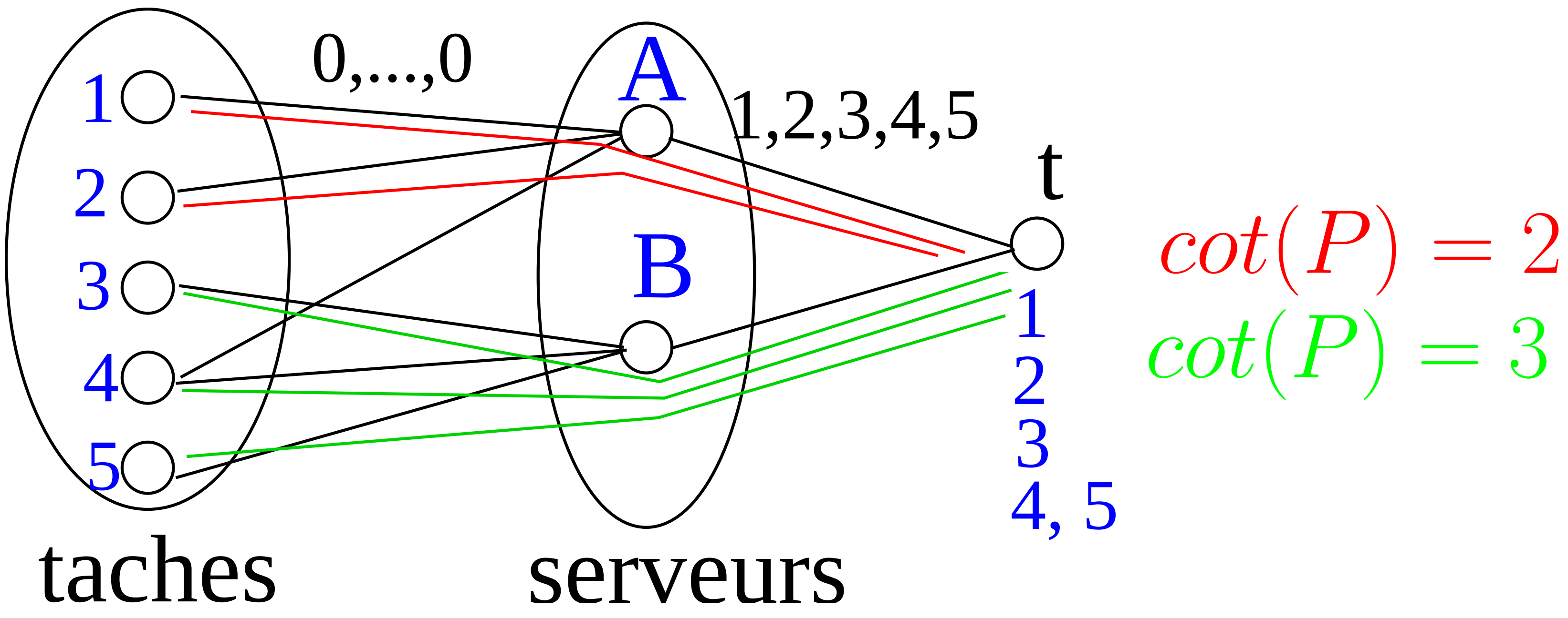
$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$

Est équilibre de Nash

Remarque

Un jeu d'allocations de tâches unitaires et un cas particulier du jeu de congestions réseau.

- G= graphe biparti + 1 sommet t.
- Chemins entre (j, t) avec j = allocation de la tâche j.



2. Existence d'un Eq. de Nash

Théorème : *Les jeux d'allocations ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Théorème [Rosenthal73]:

Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.

Preuve utilisant les jeux de potentiel.

Un jeu de potentiel est un jeu tel qu'il existe une fct de potentiel Φ sur l'ens. des configurations telle que:

Si le joueur i change de stratégie de s vers s' alors, Φ est modifiée de la même façon que l'utilité de i.

$$\Phi(s', s^{-i}) - \Phi(s, s^{-i}) = u_i(s', s^{-i}) - u_i(s, s^{-i})$$

Notation: $(s, s^{-i}) = (s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$, $(s', s^{-i}) = (s_1, \ldots, s', \ldots, s_n)$

Détermination de la fct de potentiel.

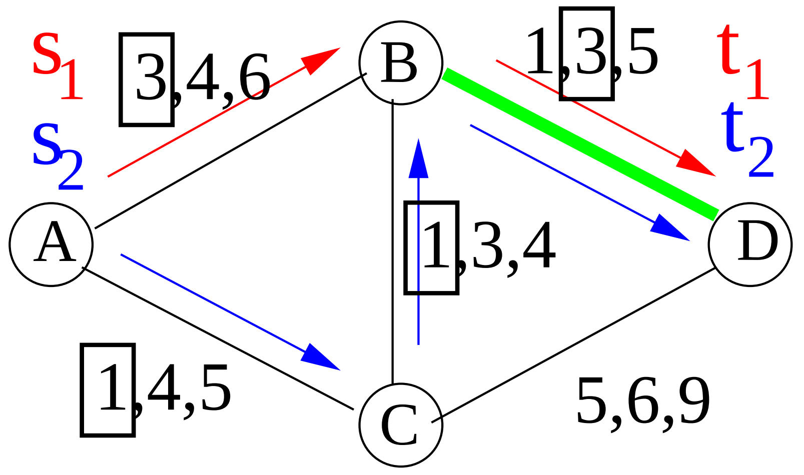
Dans les jeux de congestions réseau,

la fonction de potentiel: $\Phi(\mathcal{P}) = \sum_e \sum_{k=1}^{f(e)} d_e(k)$ avec $\mathcal{P}$ un ens. de chemins.

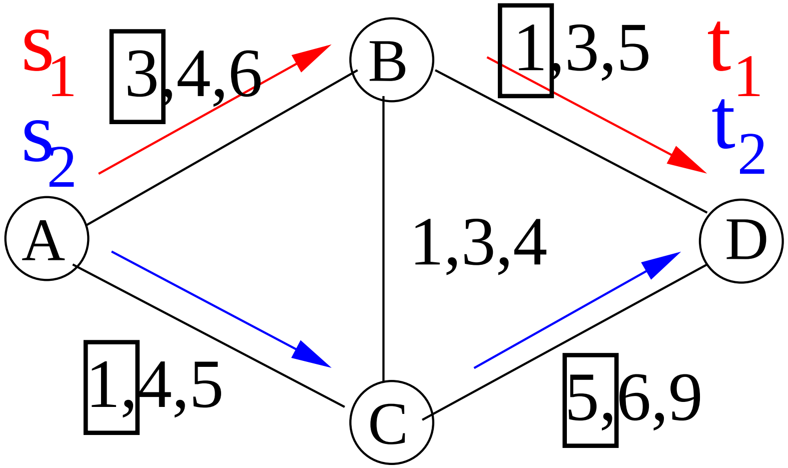
$$c(P_1) = 3 + 3 = 6$$

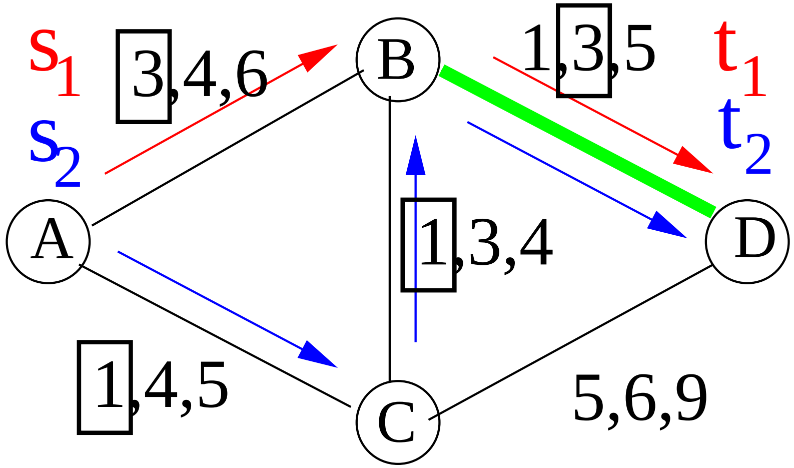
$$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$\phi(P_1, P_2) = 1 + 1 + 3 + 1 + 3$$



Changement d'états.





$c(P_1) = 3 + 1$

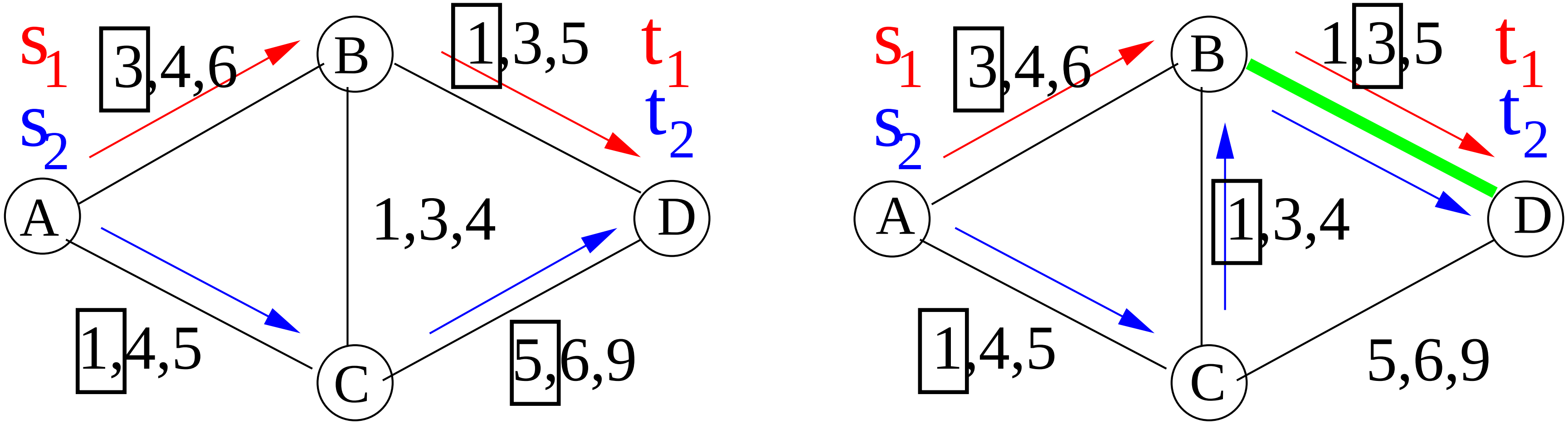
$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

Changement d'états.



$c(P_1) = 3 + 1$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

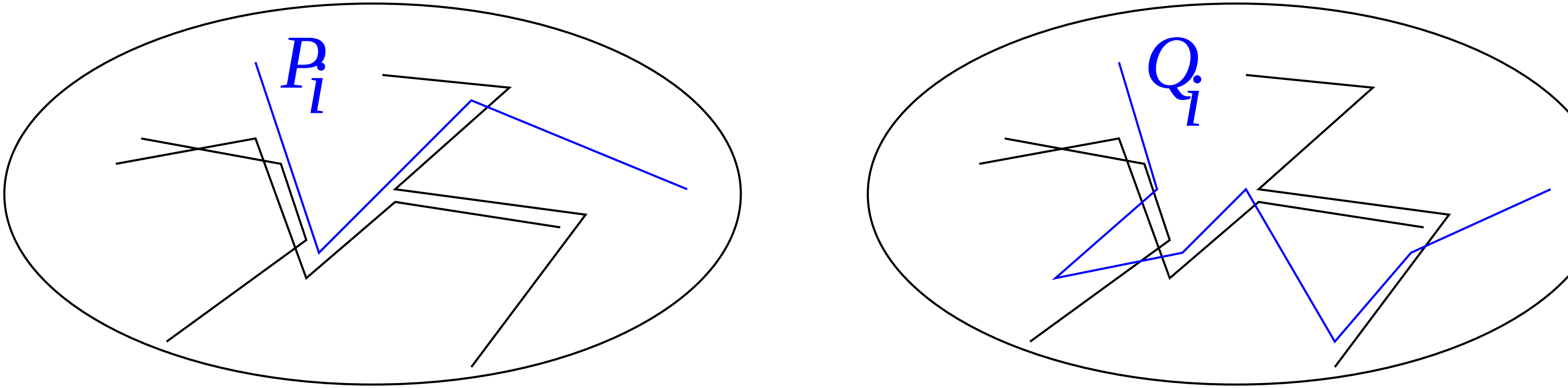
$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

$\phi(P_1, P_2') = 5 + 1 + 3 = 9$

$$\phi(P_1, P_2) - \phi(P_1, P_2') = c(P_2) - c(P_2')$$

Changement d'états

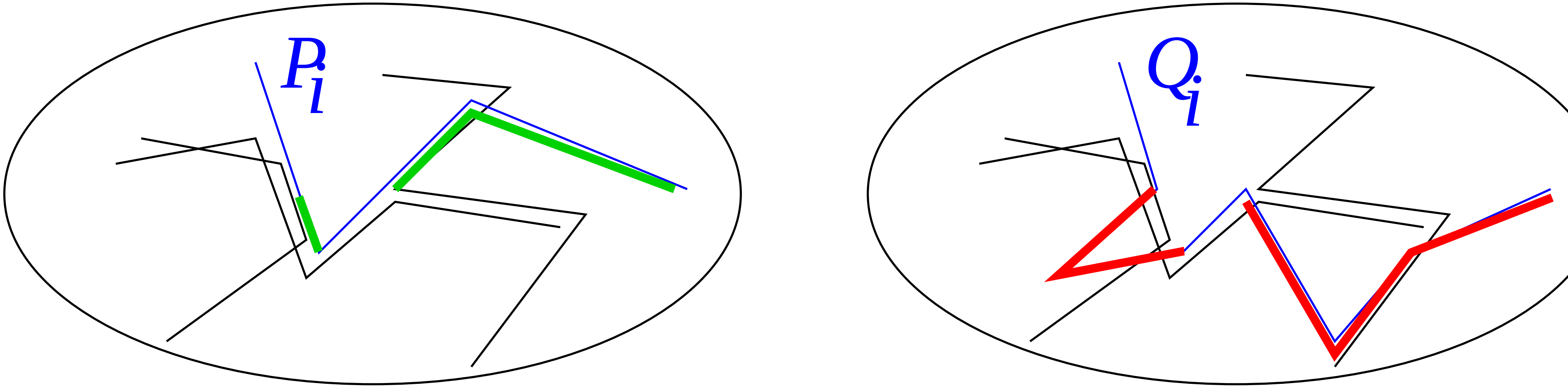
Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

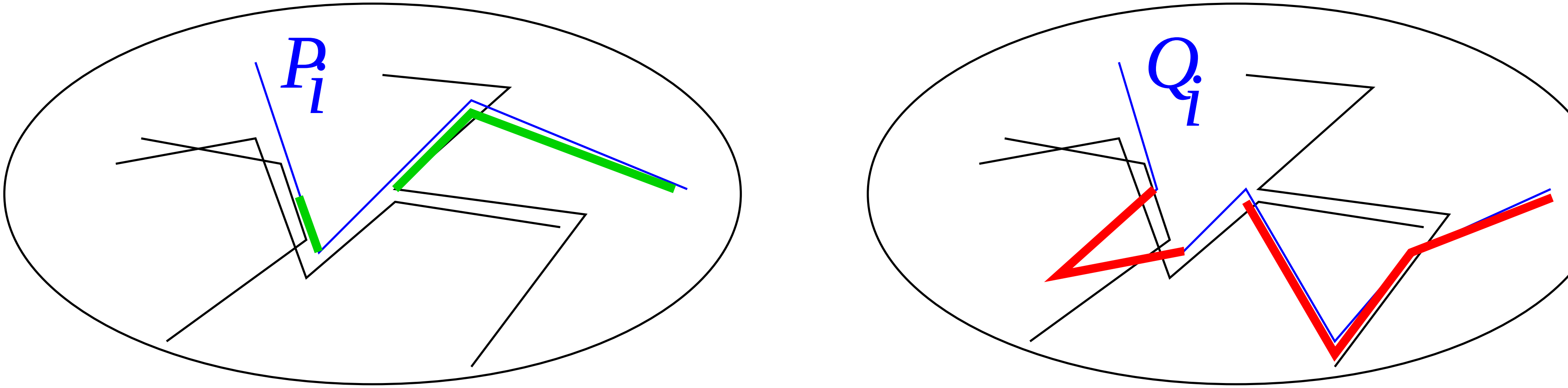
son gain = $c(Q_i \backslash P_i) - c(P_i \backslash Q_i)$



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

son gain = $\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i})$



Équilibre de Nash= $\forall i$, i n'a pas intérêt à changer de stratégie P_i en Q_i, car son gain est ≤ 0
($\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i}) \leq 0$)

Conclusion: Minimum global de $\phi \Rightarrow$ Équilibre de Nash.

Premiers résultats

Théorème [Rosenthal73]:

Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.

Conséquence: Un équilibre de Nash peut être calculé par un algorithme pseudo-polynomial dans les jeux de congestions.

Théorème [MontererShapley91]:

Les jeux de congestions sont équivalents aux jeux de potentiel.

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:

Calculer un équilibre dans les jeux de congestions réseau est PLS*-complet.*

La classe PLS: *Polynomial Local Search.*

Problème Π dans PLS: problème d'optimisation Π [Johnson, Papadimitriou, Yannakakis88]

- ayant comme objectif le calcul de minimums locaux s

  (s est minimal sur le voisinage $\Gamma(s)$)
- avec Γ calculable en tps polynomial.

PLS-Réduction de Π_1 vers Π_2 (dans PLS):

Transformation polynomiale d'une instance de Π_1 vers une de Π_2,

telle que les optimaux locaux sont préservés.

La classe PLS (*Polynomial Local Search.*).

Problème NAE-SAT:

- Instance: ens. de clauses où chaque clause c_i est pondérée par w_i.
- Mesure: la somme des poids de toutes les clauses satisfiables par l'affectation s (telle que chaque clause n'a pas tous ses littéraux à la même valeur).
- Voisinage Γ de s: les affectations qui diffèrent de s par la modification de l'affectation d'une seule variable.

Théorème [Schaeffer,Yannakakis91]: *Le problème NAE-SAT est PLS-complet.*

Jeu de congestions symétriques

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

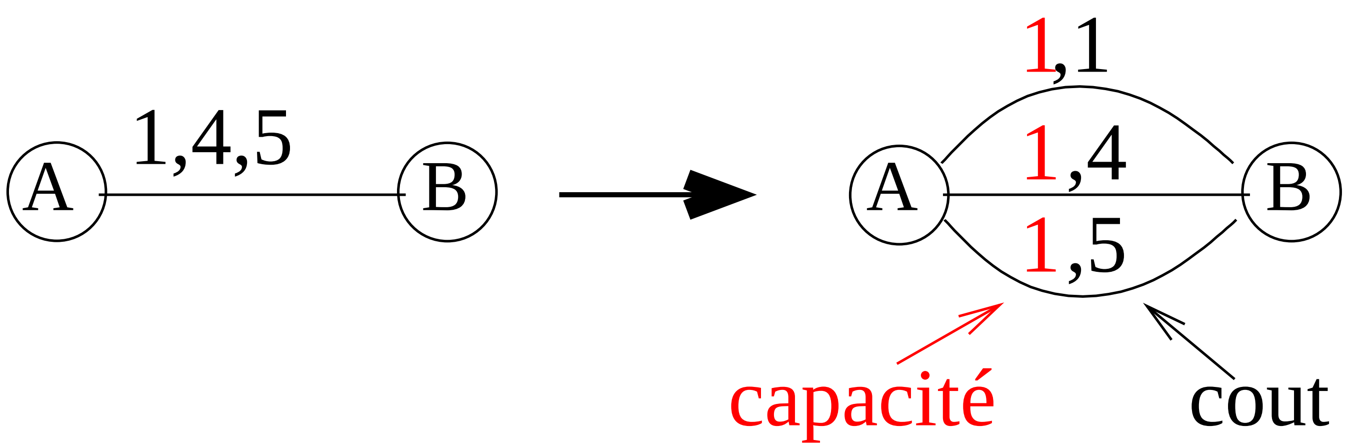
Jeu de congestions réseau symétriques= jeu de congestions réseau où tous les joueurs ont la même source et la même destination.

Jeu de congestions symétriques

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes. Une arête se transforme en n arêtes de capacité 1 et de coût $d_e(1), \ldots, d_e(n)$.

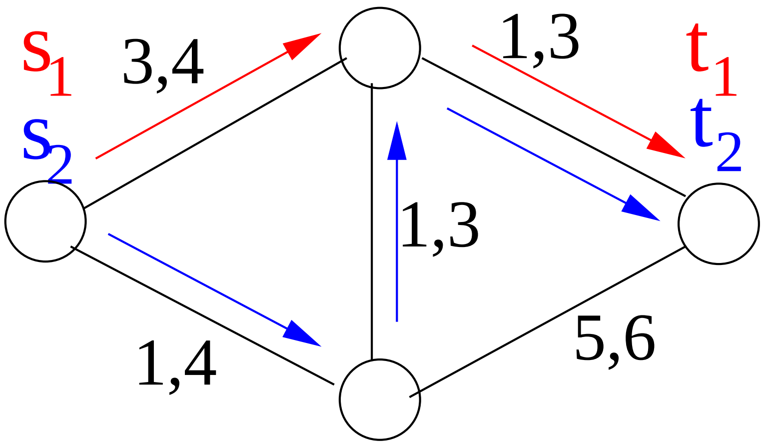


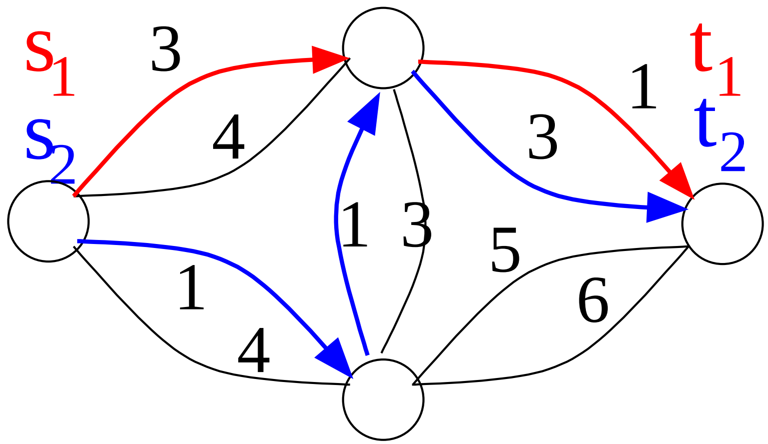
Jeu de congestions symétriques

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes.
- Flot entier max de coût minimum = solution minimisant ϕ.





$\square$

3. Prix de l'anarchie

- Quand les joueurs concurrents partagent les ressources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

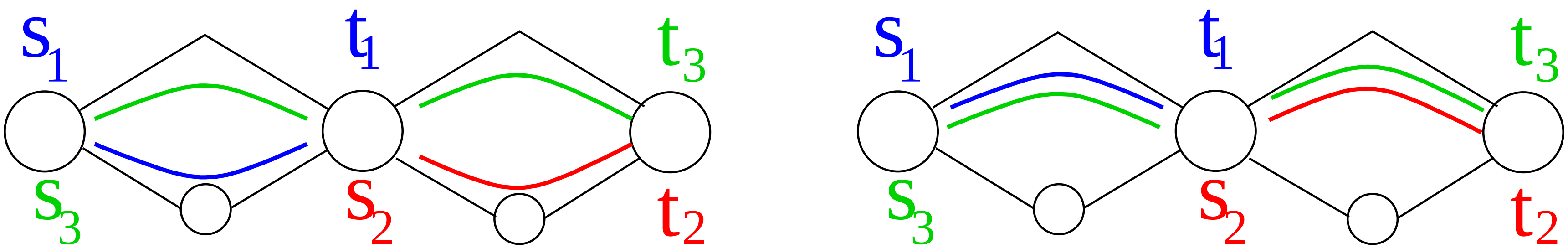
$$\text{Prix de l'anarchie} = \max_{\texttt{quilibre de Nash}\ E} \frac{Cout(E)}{OPT}$$

- Introduction de la notion d'un coût $Cout(E)$:

$$\text{Coût Social:} \begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximum des joueurs} \\ \ldots \end{cases}$$

Exemple

Jeu de congestions où $cout(e) = \#$ de chemins traversant e:



Équilibre de Nash 2,2,2 Équilibre de Nash 2,2,4

- Pour le coût social = coût moyen des joueurs:

$$PA = \frac{2+2+4}{2+2+2} = \frac{4}{3}$$

- Pour le coût social = coût max des joueurs :

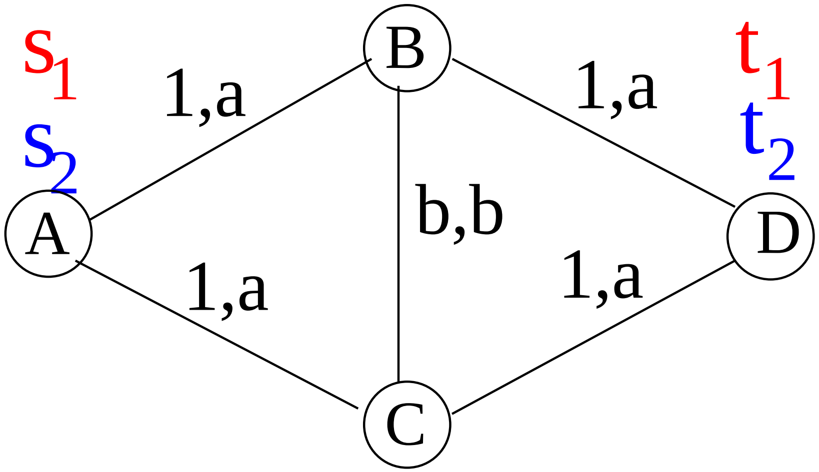
$$PA = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$



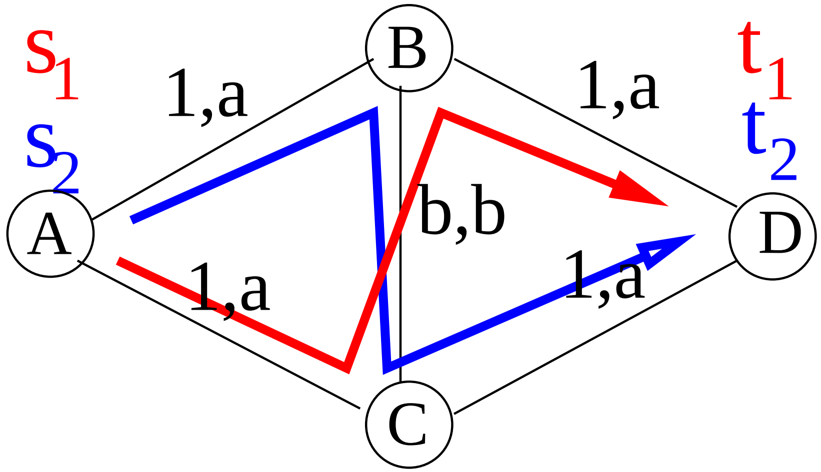
Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:



$a > 2b$

$b > 2$

Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

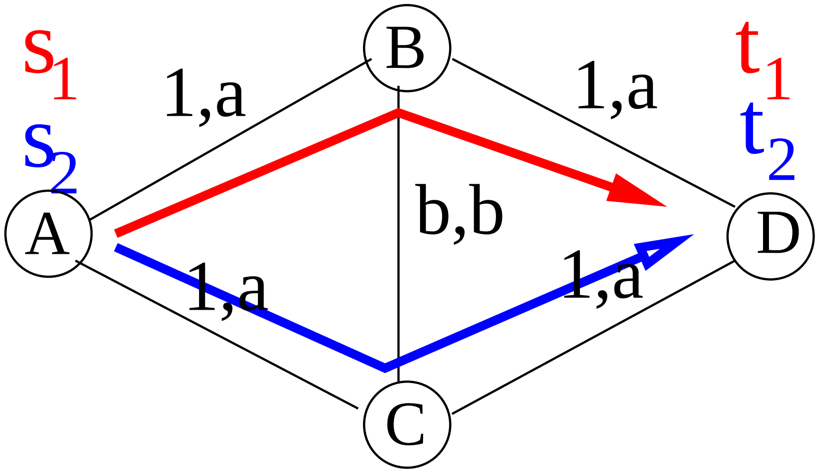
avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$$a > 2b$$

$$b > 2$$



Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

PA pour les jeux de congestion.

Les coûts des arêtes sont linéaires avec n joueurs:

		Symétrique	Asymétrique
PUR	coût social moyen	$5/2$	$5/2$
PUR	coût social max	$5/2$	$\sqrt{n}$
MIXTE	coût social moyen	≈ 2.618	≈ 2.618
MIXTE	coût social max	$??$	$??$

- 2004 Awerbuch $\&$ Azar $\&$ Epstein
- 2004: Gairing $\&$ Lucking $\&$ Mavronikolas $\&$ Monien
- 2004: Suri $\&$ Toth $\&$ Zhou
- 2005: Christodoulou $\&$ Koutsoupias

PA pour les jeux d'allocations de tâches.

	Machines Identiques	Modèle Général
Pur	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log\log m}\right)$

- 1999: Koutsoupias $\&$ Papadimitrious
- 2001: Mavronicolas $\&$ Sirakis
- 2002: Czumaj $\&$ Vöcking