Modèle des jeux et des mécanismes

Michel de Rougemont

Université Paris II

http://www.lri.fr/~mdr

Plan

Partie 1

1. Exemples de Jeux et de Mécanismes
2. Jeux à somme nulle
3. Jeux matriciels: équilibres de Nash
4. Calcul des équilibres: Lemke-Howson

Partie 2

1. Approximation d’équilibres
2. Calcul polynomial d’équilibres de marché
3. Valeur relative pour XML

I.1 Jeux et Mécanismes

1. Modèle de calculs, adapté à un nombre important d'agents, suivant une fonction d'utilité.
2. Jeux: N joueurs suivant chacun un but. Quels sont les Equilibres?
3. Mécanismes: observons un équilibre, de quel jeu sommes nous l'équilibre?

Jeux Matriciels

Dilemme des Prisonniers: deux décisions C (collaborer), D (Trahir)

		II: C	II: D
I	C	3,3	0,4
	D	4,0	1,1

N joueurs : $A(s_1,s_2,...s_N)=(a_1,a_2,...a_N)$

Stratégie du joueur j, $x^j=\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_k \end{pmatrix}$ tel que $\sum_i x_i = 1$. Gain de I: $(x^1)^T.A.x^2$

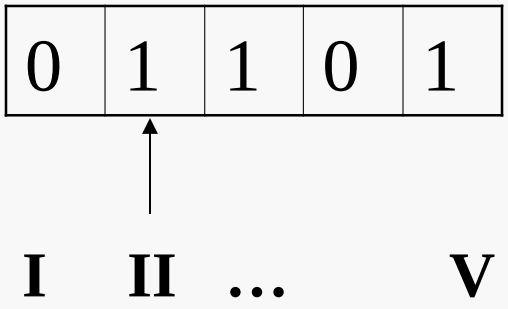
Définition: (x^1,x^2) est un équilibre de Nash, si :

$$\forall x' \ (x^1)^T.A.x^2 \geq (x')^T.A.x^2 \ \text{ et } \ \forall y' \ (x^1)^T.B.x^2 \geq (x^1)^T.B.y'$$

Exemples de Jeux

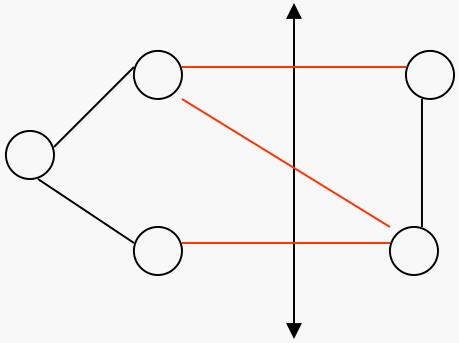
MaxSAT

SAT

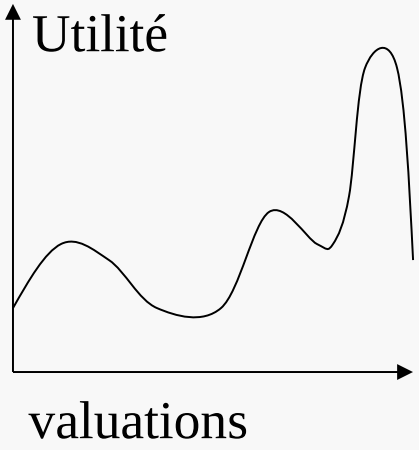


MaxCUT

Gn



jeux à N joueurs



Jeux sous forme extensive

Jeux de vérification. Graphes d’accessibilité.

Jeux logiques: Nord-Est, dames, Echecs.

Exemple de mécanisme

1. Comment faire la différence entre un vrai mail et un SPAM?

2. Modifications au protocole de mail (pop, smtp)

3. Valeur d'un Email?

4. Mécanismes classiques: enchères

Valeur proportionnelle aux calculs demandés à Alice par Bob

Modifications au protocole de mail (pop, smtp)

1. A prend un ticket sur la page Web de B. (Entrée x d'un problème)
2. A calcule f(x)=y
3. A envoie y et l'Email
4. B vérifie y

A calcule une fonction polynomiale

A prend un ticket sur la page Web de B.

B : génère un polynôme aléatoire de degré n

B: choisit n+1 valeurs aléatoires x

$$P(x) = a_1.x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$$

$$y_1 = P(x_1), y_2 = P(x_2), \ldots, y_{n+1} = P(x_{n+1})$$

Ticket = $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1} y_{n+1})$

A doit trouver P(x) à partir du ticket.

Interpolation ou Inversion matricielle

B vérifie le calcul

B garde P(x) lorsqu'il génère le ticket.
Vérifier consiste à comparer les coefficients de P(x) avec ceux envoyés par A.

On peut paramétrer:

le degré, la précision des valeurs aléatoires pour forcer A à calculer 10 minutes 30 minutes….

$$P(x)=a_1.x+a_2x^2+....a_nx^n$$

Interpolation est polynomiale

La vérification est triviale

I.2 Jeux à somme nulle

Deux joueurs I et II:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gain de II = - Gain de I

Jeu Morra: chaque joueur cache 1 ou 2 Euros et cherche à deviner le choix de l'autre joueur. Il gagne s'il devine correctement. Si 1 seul joueur gagne, son gain est le montant caché total, payé par l'autre joueur, sinon le gain est de 0

Gain du Jeu

Gain du jeu : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_i\, y_j$

Joueur I : $Max_x\ Min_y \quad x^T.A.y$

$$Min_y \quad x^T.A.y = Min_j \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i = t$$

Réponse de II peut être pure

$$x^T.A.y = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j t = t$$

Donc : $Min_y\ x^T.A.y \geq t$

Toute solution pure doit satisfaire

$$Min_y \quad x^T.A.y \leq Min_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i = t$$

Stratégie optimale

Conclusion $t \leq Min_y \quad x^T.A.y \leq t$

$$Min_y \quad x^T.A.y \geq t$$

Joueur II peut jouer une stratégie pure

$$Max \; Min_j \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$Max \quad z$$

$$z - \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Stratégie optimale

Jeu de Morra:

$$
\begin{array}{llllll}
Max & z & & & & \\
z+ & -2x_2 & +3x_3 & & \leq & 0 \\
z+ & 2x_1 & & -3x_4 & \leq & 0 \\
z & -3x_1 & & +4x_4 & \leq & 0 \\
z & & +3x_2 & -4x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 +x_4 & = & 1
\end{array}
$$

Solution x*= [0,3/5,2/5,0]

Résolution par simplex.

Théorème Minmax

Situation pour le joueur II

$$Min \; Max_i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$Min \quad w$$

$$w - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j \leq 0$$

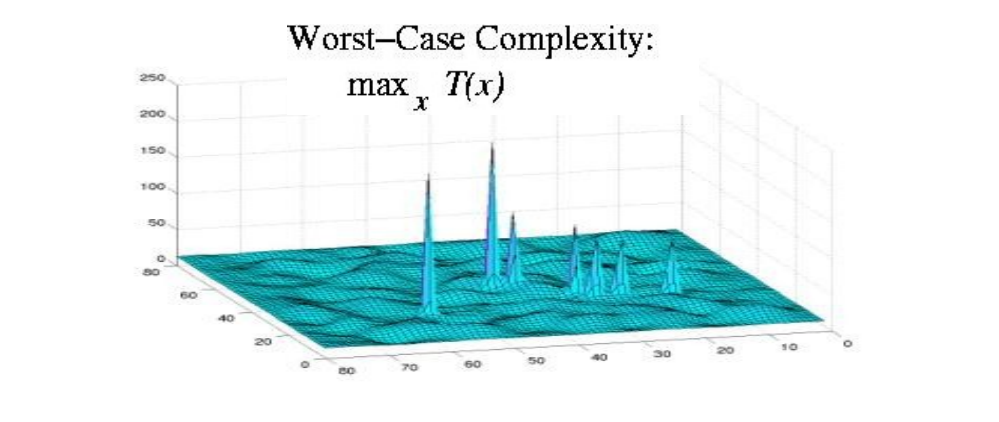
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

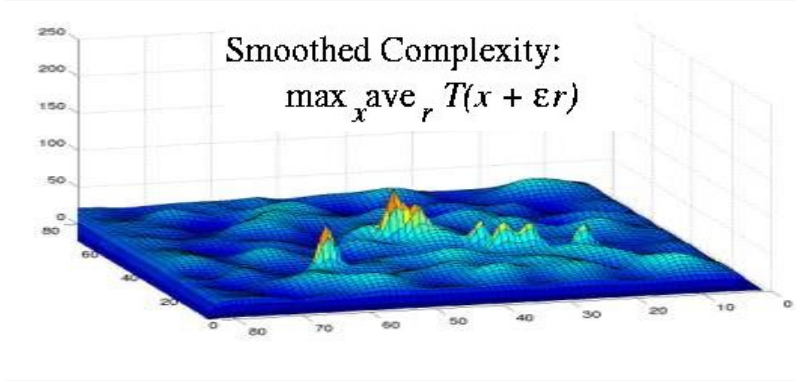
Problème dual du précédent. Par dualité:

Théorème (Von Neuman) : Max Min = Min Max

Analyse du Simplex

D. Spielman, M.I.T., 2001





- Simplex peut être exponentiel.
- Simplex EST polynomial pour la complexité de lissage.
- Application pratique: modifier aléatoirement la matrice A, et l'algorithme converge plus vite.

1.3 Jeux matriciels généraux

Deux joueurs: les gains des I et II sont définis par deux matrices A,B de même dimension. Pour n joueurs, n hypercubes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Max \;\; x^T.A.y \qquad\qquad Min \;\; e^T.u$$

$$E.x = \;\; e \qquad\qquad E^T.u \geq A.y$$

Solution possible:
x*= [1,0] , y*= [0,0,1]

Solution (x*,y*) est un équilibre de Nash.

Jeux matriciels

Par dualité: $x^T.A.y = e^T.u$ Primal = Dual

$$E.x = e \Rightarrow e^t = x^t.E^t$$

$$x^T.A.y = x^t.E^t.u$$
$$x^T.(E^t.u - A.y) = 0$$
$$E^t.u - A.y \geq 0$$

Pour le joueur II:

$$Max\ x^T.B.y$$

$$F.x = f$$

$$y^T.(F^t.v - B^t.x) = 0$$

$$(F^t.v - B^t.x) \geq 0 \quad \text{par dualité}$$

C.N.S. pour être un équilibre de Nash

Un couple (x,y) est un équilibre de Nash ssi il existe u,v tel que:

$$E.x = e$$

$$F.y = f$$

$$E^t.u - A.y \geq 0$$

$$F^t.v - B^t.x \geq 0$$

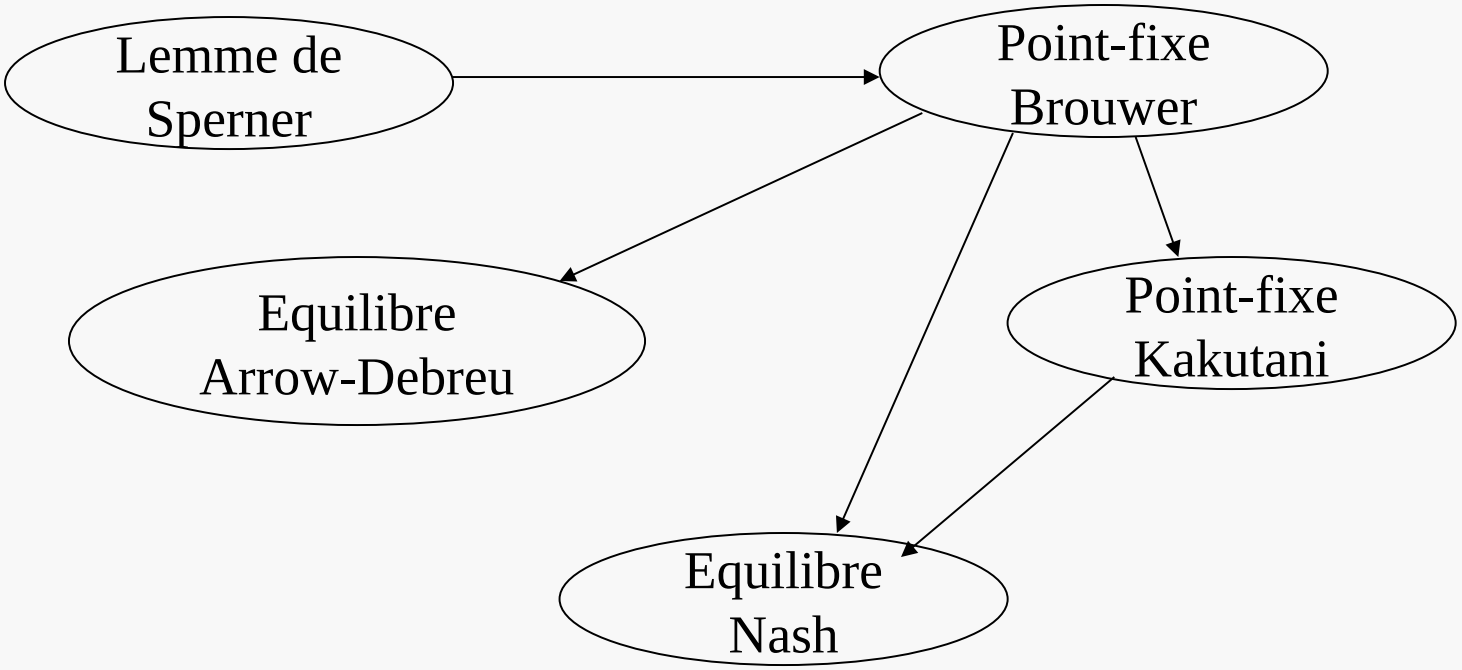
$$x^T.(E^t.u - A.y) = 0$$

$$y^T.(F^t.v - B^t.x) = 0$$

Programme linéaire + contraintes quadratiques de complémentarité.

Simplex + complémentarité= Lemke-Howson

Existence d'Equilibres



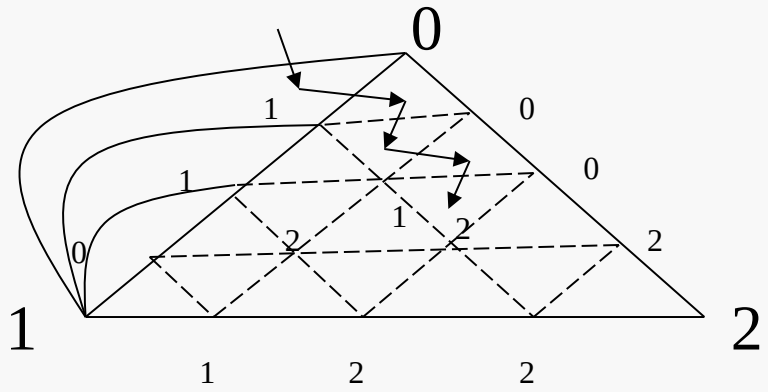
Preuves non-constructives.

Lemme de Sperner

Etiqueter un simplex:

•Chaque point frontière ne peut pas avoir l'étiquette du sommet opposé.

•Chaque point intérieur a une étiquette arbitraire.

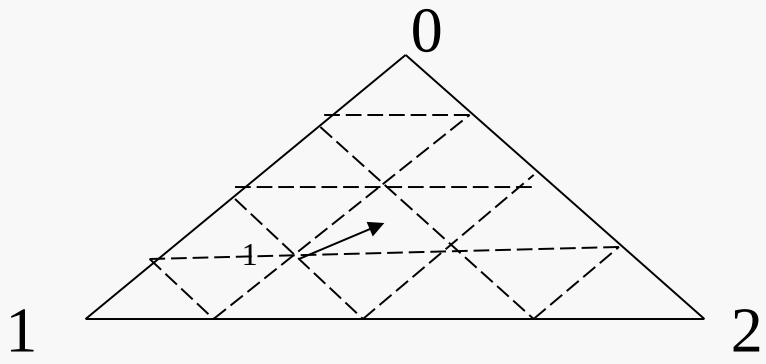


Sperner : il existe un triangle 0-1-2

Commencer sur le côté gauche avec une arête 0-1 qui détermine un triangle qui admet une autre autre arête 0-1. On parcourt ainsi des triangles 1 seule fois. Il existe un nombre fini de triangles et on doit terminer sur 0-1-2.

Point fixe de Brouwer

Brouwer: $\mathbf{Soit\ \Phi\ une\ fonction\ continue\ sur\ un\ n\text{-}simpl}$
$\mathbf{Il\ existe\ x\ tel\ que\ \Phi(x)=x.}$

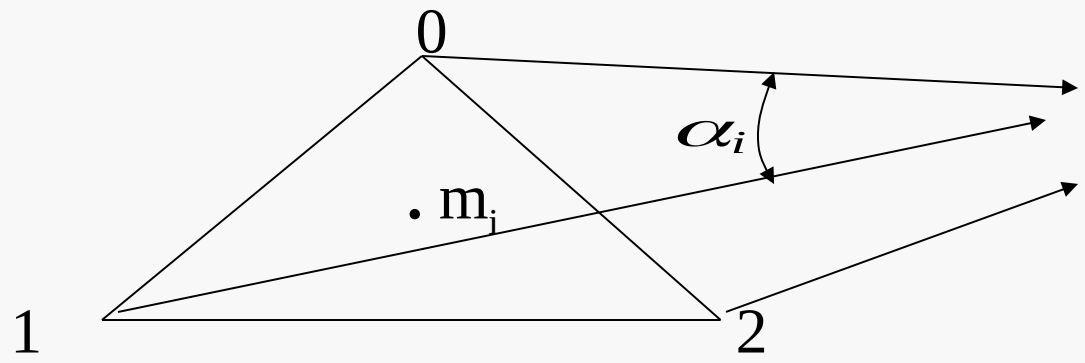


Soit $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$ un découpage en triangles de plus en plus fins.

Déterminer un coloriage en détectant le côté traversé par $\Phi(x)$. .

C'est un étiquettage de Sperner. Il existe un triangle t_i 0-1-2 de centre m_i. Pour une séquence de m_i il existe une sous-séquence x_i qui converge vers x, point fixe.

Point fixe de Brouwer



Pour une séquence de m_i il existe une sous-séquence x_i qui converge vers x^*.

Si le coloriage est 0-1-2, la situation ci-dessus est impossible, au moins un des angles $\alpha_i \geq \frac{\pi}{3}$

Continuité de f implique que $\Phi(x^*) = x^*$

Existence de Nash

Soit s une stratégie pure du joueur j:

$$d_{j,s} = A_j(p_1, p_2, \ldots p_{i-1}, s, p_{i+1}, \ldots p_n) - A_j(p_1, p_2, \ldots p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots p_n)$$

$$f(p_1, p_2, \ldots p_n) = (p_1', p_2', \ldots p_n')$$

Idée:

$$p_{j,s}' = p_{j,s} + d_{j,s}$$

Pour éviter valeur négative et maintenir une distribution:

$$p_{j,s}' = (p_{j,s} + Max(d_{j,s}, 0)) / (\sum_s p_{j,s} + Max(d_{j,s}, 0))$$

Nash est le point-fixe de f.

Equilibre Arrow-Debreu

Entrée:

- Ensemble B d'acheteurs
- Ensemble A de biens divisibles
- Vecteur M de valeurs m_i entières pour chaque acheteur
- Matrice Utilité: $u_{i,j}$ donnant l'utilité du produit i pour l'acheteur j.

Sortie: vecteur de prix p_i pour chaque produit i

- Chaque acheteur maximise son utilité
- Tout est dépensé
- Tout est acheté

x_i est le vecteur de biens achetés par i

$$p.x_i = m_i \qquad \sum_i x_{i,j} = a_j$$

$$Max\ x_{i,j}.u_{i,j}$$

Modèle Arrow-Debreu

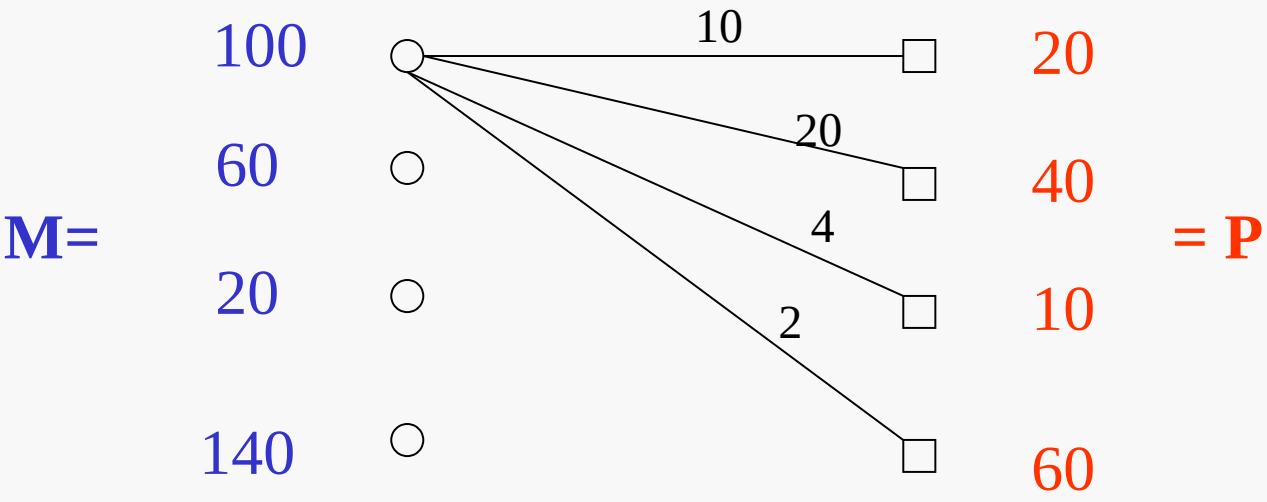
Entrée:

- A, ensemble de n produits
- B, ensemble de m consommateurs (Buyers)
- m, vecteur entier de ressources m_i
- Utilités, matrice d'entiers $u_{i,j}$ du cons. i pour le produit j

Sortie:

- Vecteur de prix p_j
- Allocation $x_{i,j}$
- Marché s'équilibre: (tout est dépensé et tout est consommé)
- Chaque consommateur maximise son utilité.

Modèle Arrow-Debreu



B: Buyers **A : Products**

$$Buyer\ i: \begin{pmatrix} Max & \sum & x_{i,j}.u_{i,j} \\ m_i & = \sum_j & x_{i,j}.p_j \\ x_{i,j} & \leq & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe P, tel que l'allocation de chaque consommateur est optimum.

Equilibre Arrow-Debreu

Arrow-Debreu: il existe un vecteur p qui résout le marché.

Preuve: définir un potentiel pour p.

- Si la demande trop forte, augmenter p

$$\Phi(p_j) = \frac{p_j + (m_j - \sum_i p_j . x_{i,j})}{C}$$

D'après Brouwer, il existe un point fixe qui résoud le marché.

Observations:

- L'équilibre peut-être non calculable au sens des réels (Richter et Wong)
- Algorithme polynomial au sens BSS (Devanur, Papadimitriou, Saberi, Vazirani)

I.4 Algorithme de Lemke-Howson

Procédure algorithmique pour trouver des équilibres: Simplex+ complémentarité.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Algorithme LH

1. Déterminer les points frontières et le graphe LH dans chaque Simplex,
2. Colorier les simplex de I et II avec des couleurs représentant les stratégies pures de I et II,
3. Naviguer à partir de l'origine jusqu'à un couple (x,y) avec toutes les couleurs (Nash).

Coloriage Shapley dans Lemke-Howson

M={1,2} pour 2 stratégies pures de I
N={3,4,5} pour 3 stratégies pures de II

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Une stratégie x est coloriée par (1,3) si x=(0,1), i.e. I n'utilise pas la 1ère décision, et 3 est la meilleure réponse de II.

Théorème (Nash 1951): (x,y) est un équilibre pour (A,B) ssi

$$x_i > 0 \Rightarrow a_i\, y = Max_{k \in M}\ a_k y$$

$$y_i > 0 \Rightarrow b_i\, x = Max_{l \in N}\ b_l\, x$$

Théorème: (x,y) est est un équilibre pour (A,B) ssi les couleurs de x et de y couvrent M+N.

Algorithme de Lemke-Howson

LH Graphes dans les simplex de I et II

- Extrémités du simplex
- Points frontières

$$\sum_i x_{i,1}.b_{i,1} = \sum_i x_{i,2}.b_{i,2} \text{ ou } \sum_i x_{i,2}.b_{i,2} = \sum_i x_{i,3}.b_{i,3} \text{ ou } \sum_i x_{i,1}.b_{i,1} = \sum_i x_{i,3}.b_{i,3}$$

Exemple :

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1-\lambda-\mu \end{pmatrix}$$

Algorithme de Lemke-Howson

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Colonnes de B:

Colonnes 1,2: $\lambda+4(1-\lambda)=3\lambda+(1-\lambda)$ d'où $\lambda=3/5$

Pour $\lambda=3/5$ valeur=11/5 pour colonnes 1,2

Pour $\lambda=3/5$ valeur=12/5 pour colonne 3. Non point limite.

Colonnes 2,3: $3\lambda+(1-\lambda)=2\lambda+3(1-\lambda)$ d'où $\lambda=2/3$

Pour $\lambda=2/3$ valeur=7/3 pour colonnes 1,2

Pour $\lambda=7/3$ valeur=2 pour colonne 1. Point limite.

Colonnes 1,3: $\lambda+4(1-\lambda)=2\lambda+3(1-\lambda)$ d'où $\lambda=1/2$

Pour $\lambda=1/2$ valeur=5/2 pour colonnes 1,3

Pour $\lambda=1/2$ valeur=2 pour colonne 2. Point limite.

Lignes de A:

Lignes 1,2 dans A $2.\lambda+\mu+3.(1-\lambda-\mu)= 3.\lambda+3.\mu+(1-\lambda-\mu)$

$$2= 3\lambda+4\mu$$

Algorithme de Lemke-Howson

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Coloriage LH Graphes dans les simplex de I et II

5 couleurs: (1,2) pour I et (3,4,5) pour II.

Coloriage dans le simplex de I:

$Si \quad x_i = 0$, point (x_1, x_2) colorié i pour $i = 1$ ou 2

Pour un point x, si colonne j optimale (B),
point x colorié j $(j = 3,4,5)$

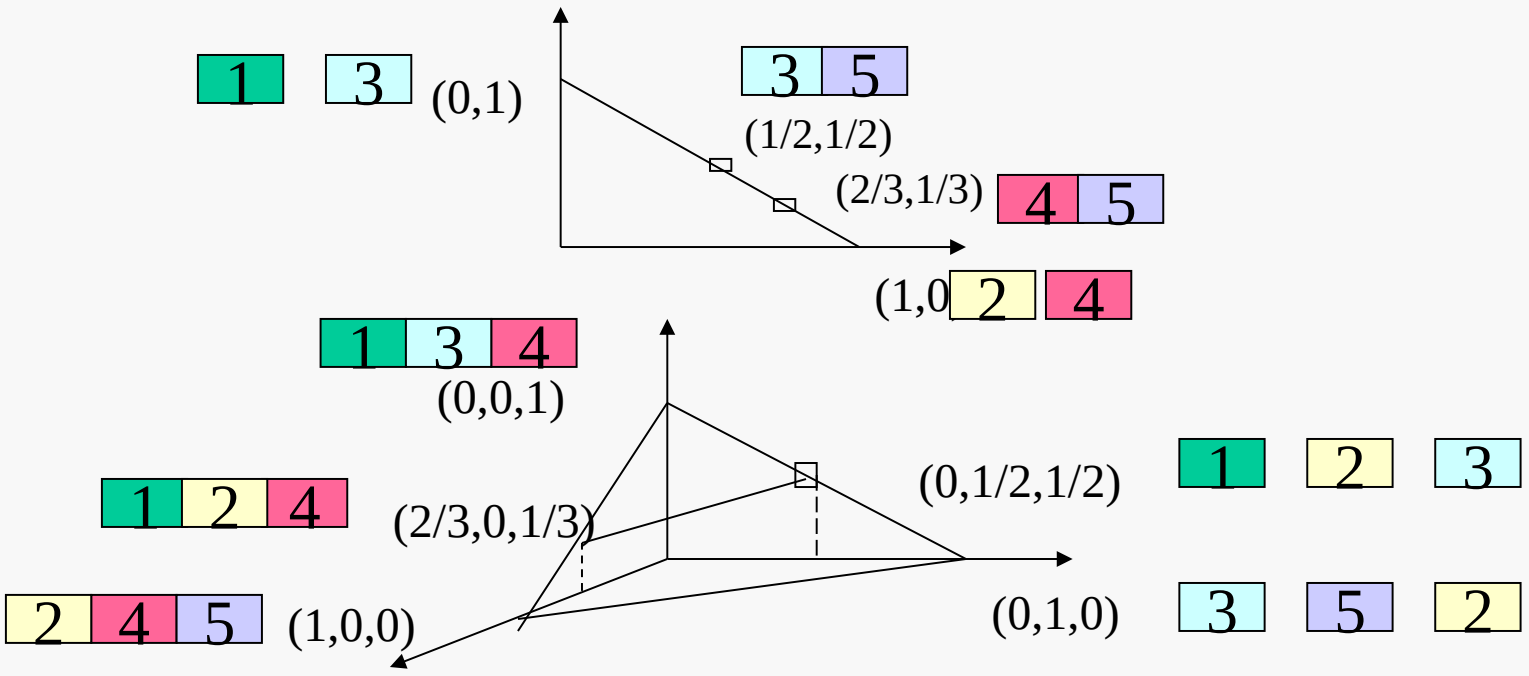
Coloriage symétrique pour II

$Si \quad y_i = 0$, point (y_1, y_2, y_3) colorié j pour $j = 3,4,5$

Pour un point y, si ligne i optimale (A),
point y colorié i $(i = 1,2)$

Algorithme de Lemke-Howson

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Couleurs Lemke-Howson

1 2 3 4 5

Algorithme de Lemke-Howson

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lemke-Howson:

Paire (x_1,x_2) (y_1,y_2,y_3) est un équilibre de Nash ssi l'union de leurs couleurs =l'ensemble C des couleurs.

Exemple:

Paire (0,1) (1,0,0) est un équilibre de Nash
Paires (2/3,1/3),(0,1/2,1/2) et (1/2,1/2),(2/3,0,1/3) sont les 2 autres équilibres de Nash

Procédure algorithmique:

Commencer en (0,0),(0,0,0) et choisir une couleur à exclure pour x puis pour y.

On termine sur un équilibre de Nash.

Développement récents

1. Approximation de Nash : (Lipton et al. EC 03)

2. Calcul Polynomial d'Equilibres de marchés (Devanur et al. STOC 01)

3. Valeur de l'Information relative à un schéma XML

   Property testing of regular trees, ICALP 04,
   Property and Equivalence testing on strings, ECCC04

- Rationalité limitée (stratégies d'automates)
- Jeux de congestion et de potentiel
- Mécanismes véraces, enchères combinatoires
- Equilibres corrélés

II.1 Equilibres approchés

Une paire (x',y') est un équilibre approché si:

$$\forall x, \quad x.A.y' \leq x'.A.y' + \varepsilon$$
$$\forall y, \quad x'.B.y \leq x'.B.y' + \varepsilon$$

Lipton, Markakis, Mehta 2003: Pour tout équilibre de Nash (x*,y*) il existe un équilibre approché qui l'approxime, de support:

$$k = (Log\ n) / \varepsilon^2$$

On a:

$$\left| x'.A.y' - x^*.A.y^* \right| \leq \varepsilon$$
$$\left| x'.B.y' - x^*.B.y^* \right| \leq \varepsilon$$

Référence: Playing large games using simple strategies, R. Lipton, E. Markakis, A. Mehta, ECOM 03

Existence d'équilibres approchés

Existence d'équilibres approchés démontrée par la méthode probabiliste.

Prob [il existe un tel (x',y')] >0

Exemple: (3/5,2/5) (0,1/2,1/2) est Nash

(1,0) (0,1/3,2/3) est-il ε - Nash ?

Preuve: Soit k tirages de stratégies pures selon x*.
Soit x' la stratégie mixte uniforme obtenue.

$$\Phi_1 : \left\{ \left| x'.A.y' - x^*.A.y^* \right| \leq \varepsilon/2 \right\}$$

$$\Phi_2 : \left\{ \left| x'.B.y' - x^*.B.y^* \right| \leq \varepsilon/2 \right\}$$

$$\pi_{1,i} : \left\{ x^i.A.y' \leq x'.A.y' + \varepsilon \right\} \text{ pour } i = 1,\ldots,n$$

$$\pi_{2,j} : \left\{ x'.B.y^j \leq x'.B.y' + \varepsilon \right\} \text{ pour } j = 1,\ldots,n$$

$$\text{Good} = \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \pi_{1,i} \cap \pi_{2,j}$$

Estimation de la probabilité d'existence

$$\text{On veut montrer : } \Pr[\text{Good}] > 0$$

$$\Pr[\neg \text{Good}] \leq \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

Borner chaque probabilité:

$$\text{Pour } \Phi_1 : \{ | x'.A.y' - x^*.A.y^* | \leq \varepsilon/2 \}$$

$$\Phi_{1,a} : \{ | x'.A.y^* - x^*.A.y^* | \leq \varepsilon/4 \}$$

$$\Phi_{1,b} : \{ | x'.A.y' - x'.A.y^* | \leq \varepsilon/4 \}$$

$$\Phi_{1,b} \cap \Phi_{1,b} \subseteq \Phi_1$$

$x'.A.y^*$ est la somme de k variables indépendantes de moyenne $x^*.A.y^*$

Prob [Good] > 0

$$\Phi_{1,a} : \{ \mid x'.A.y^* - x^*.A.y^* \mid \leq \varepsilon/4 \}$$

$$\mathrm{Prob}[\neg \Phi_{1,a}] \leq 2.e^{-k\varepsilon^2/8}$$

Par Chernoff-Hoeffding:

Similairement pour

$\neg \Phi_{1,b}$ et donc $\mathrm{Prob}[\neg \Phi_1] \leq 4.e^{-k\varepsilon^2/8}$

$$\Pr[\neg \mathrm{Good}] \leq \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

$$\Pr[\neg \mathrm{Good}] \leq 8.e^{-k\varepsilon^2/8} + 8.n.(.e^{-k\varepsilon^2/8}) < 1$$

pour $k = (Log\ n)/\ \varepsilon^2$

II.2 Equilibre de marché (Arrow-Debreu)

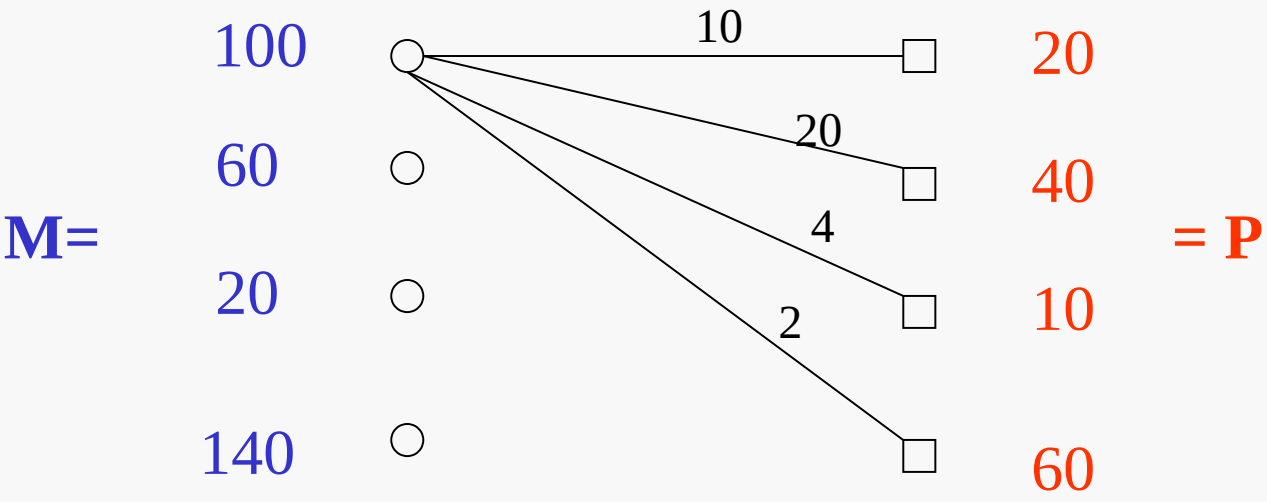
Entrée:

- A, ensemble de n produits
- B, ensemble de m consommateurs (Buyers)
- m, vecteur entier de ressources m_i
- Utilités, matrice d'entiers $u_{i,j}$ du cons. i pour le produit j

Sortie:

- Vecteur de prix p_j
- Allocation $x_{i,j}$
- Marché s'équilibre: (tout est dépensé et tout est consommé)
- Chaque consommateur maximise son utilité.

Modèle Arrow-Debreu



B: Buyers **A : Products**

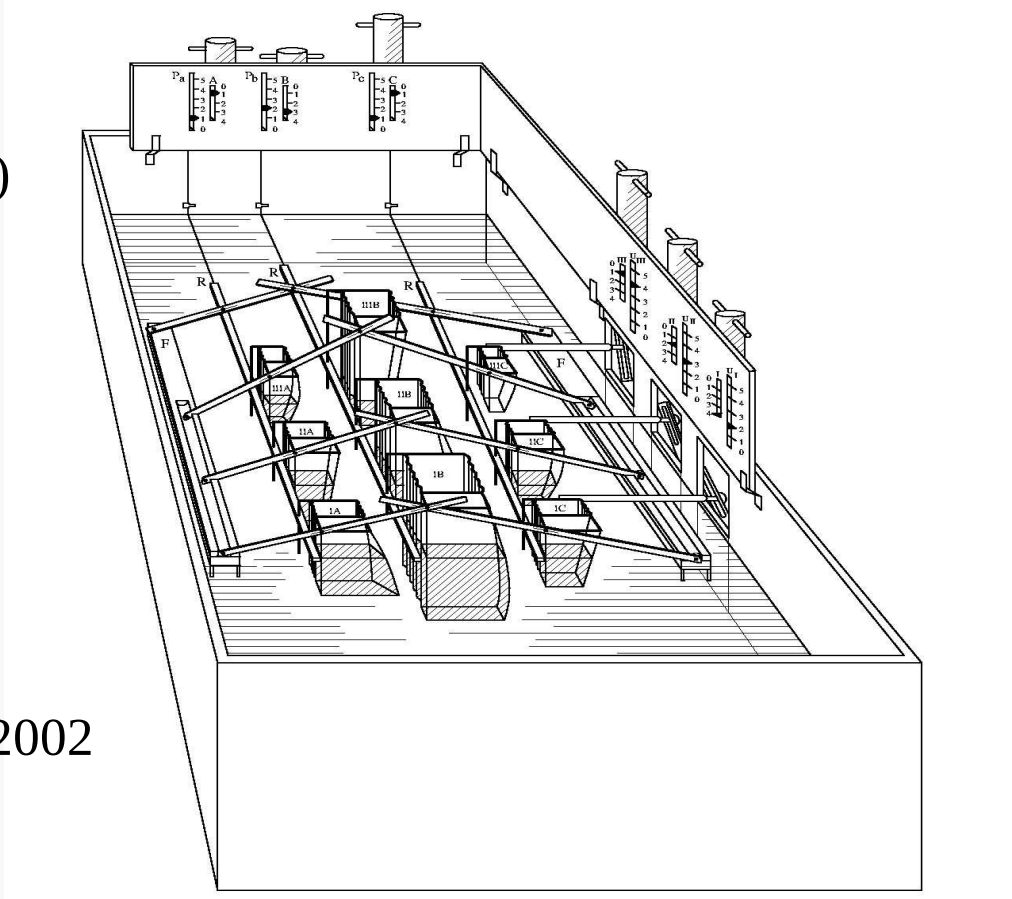
$$Buyer\ i: \begin{pmatrix} Max & \sum & x_{i,j}.u_{i,j} \\ m_i & = \sum_j & x_{i,j}.p_j \\ x_{i,j} & \leq & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe P, tel que l'allocation de chaque consommateur est optimum.

Arrow-Debreu

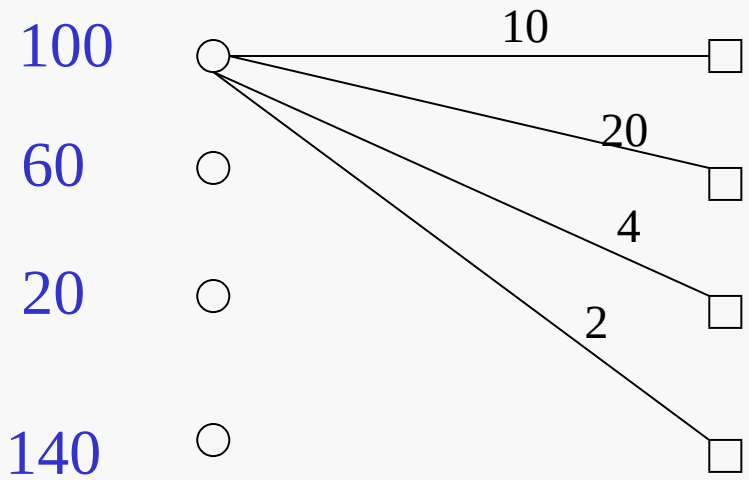
Historique:

- Irving Fisher 1891 (concave functions)
  - –Hydraulic apparatus for calculating equilibrium
- Eisenberg & Gale 1959
  - –(unique) equilibrium exists
- Devanur, Papadimitriou, Saberi & V. 2002
  - –poly time alg for linear case
- V. 2002: Generalization of linear case



Modèle Arrow-Debreu

M=



= P

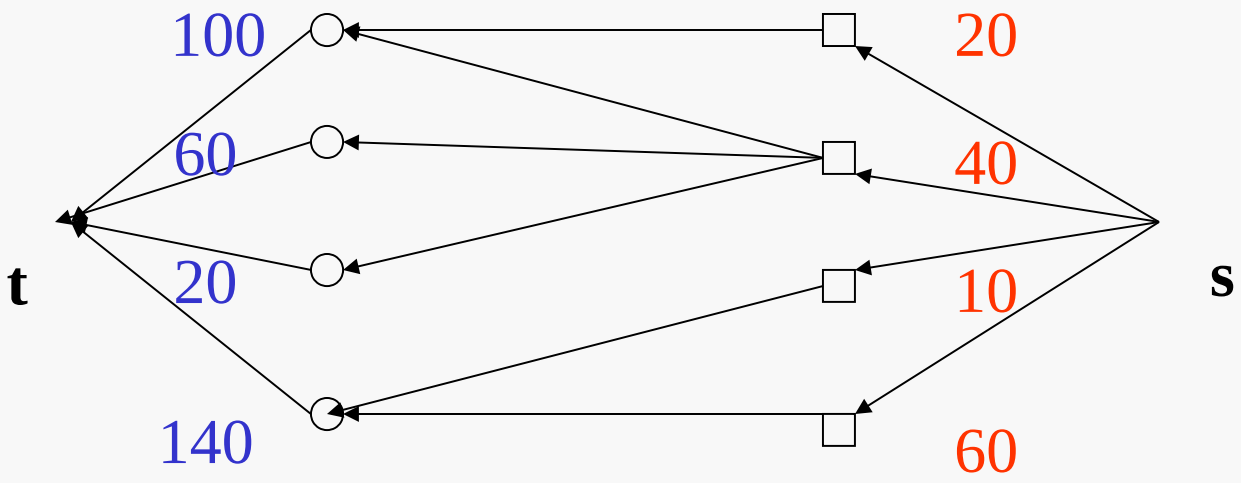
1/2
1/2
4/10
2/60

B: Buyers **A : Products** **Bang/Buck**

$$Buyer\ \ i : \begin{pmatrix} Max & \sum & x_{i,j}.u_{i,j} \\ m_i & = \sum_j & x_{i,j}.p_j \\ x_{i,j} & \leq & 1 \end{pmatrix}$$

Approche DPSV : Devanur, Papadimitriou, Daberi, Vazirani

BB: Bang per buck of Buyer i : $\alpha_i = \max_j \frac{u_{i,j}}{p_j}$



Sous-graphe BB : (i,j) existe si BB maximum.

Algorithme DPSV pour Arrow-Debreu

Initialisation des prix: $p_j = \frac{1}{n}$

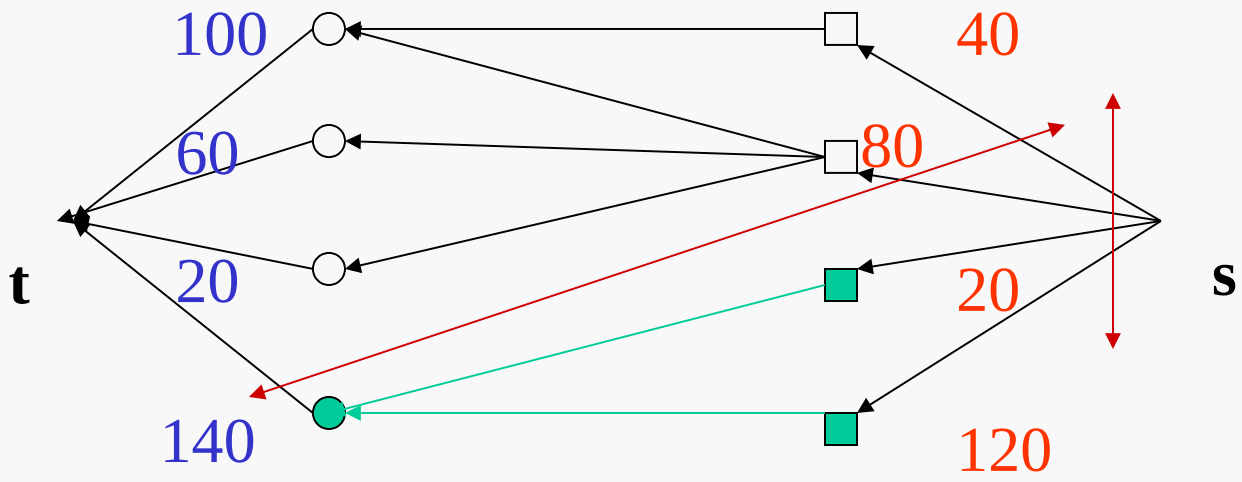
- Tester si tous les produits sont connectés à un acheteur.
- Si non, baisser les prix correspondants.

Augmentation des prix jusqu'à atteindre l'équilibre:

- Maintenir s comme coupe minimum (tout est consommé)
- Tester si t est une coupe minimum (tout est dépensé).
  - Trouver l'augmentation des prix
  - Déterminer une partie du sous-graphe qui réalise un sous-équilibre

Primal Dual : augmenter les prix, Max-Flot

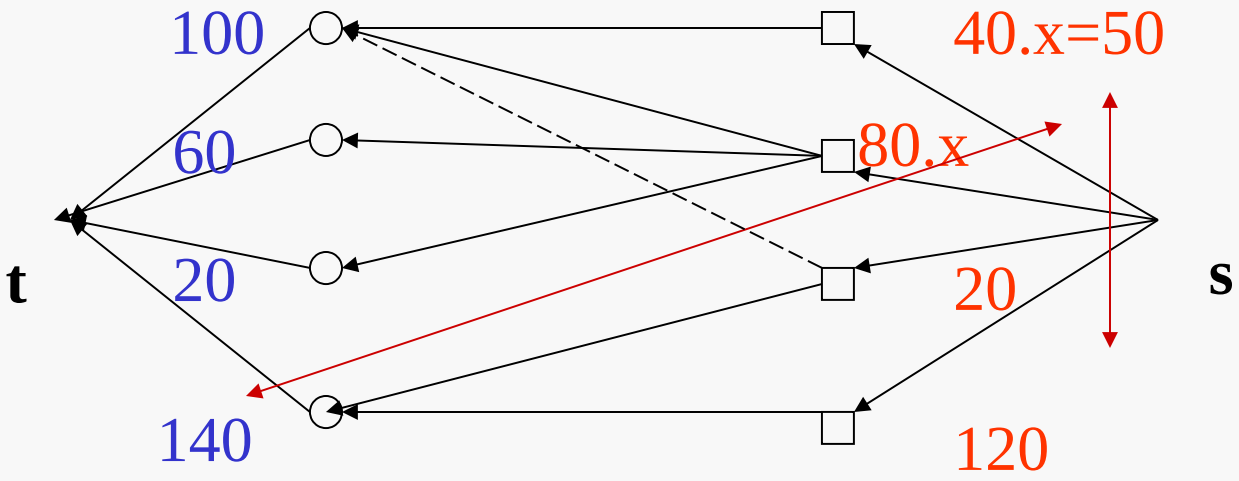
Flot Maximum dans le graphe DPSV



Augmenter les prix pour le graphe non-figé:

- **Maintenir (t+A+B, s) comme coupe minimum**
  - **Une autre coupe fige un sous- graphe (Event 1)**
- **Si une nouvelle arête apparaît défiger la composante (Event 2).**

Flot Maximum dans le graphe DPSV



$$S \subseteq A,\ p(S) = \sum_{i \in S} p_i$$

$$\Gamma(S) = \{ i \in B :\ \exists j \in A, (i,j) \in E \},\ m(\Gamma(S)) = \sum_{i \in \Gamma(S)} m_i$$

Lemme1: s est une coupe minimum ssi

$$\forall S \subseteq A,\quad p(S) \leq m(\Gamma(S))$$

Itérations dans le graphe DPSV

Lemme2 on peut déterminer x^*

avec n Max-Flot itérations.

$$x^* = \min_{S \subseteq A} \frac{m(\Gamma(S))}{p(S)} \quad pour \quad S^*$$

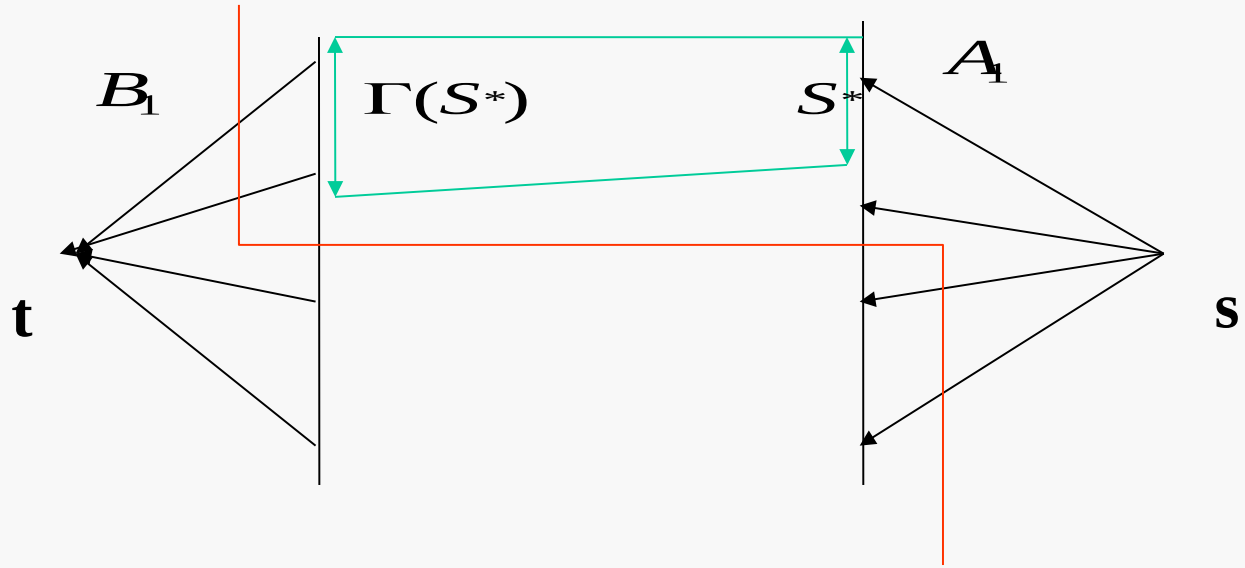
$$x = \frac{m(B)}{p(A)}$$

Si {s} est une coupe minimum, alors x=x*.

Récursion DPSV avec Max-Flot

Lemme 3: si {s} n'est pas une coupe minimum, mais {s+A1+B1} alors :

$$S^* \subseteq A_1$$



Réappliquer le raisonnement sur (A1,B1).
Au plus n itérations.

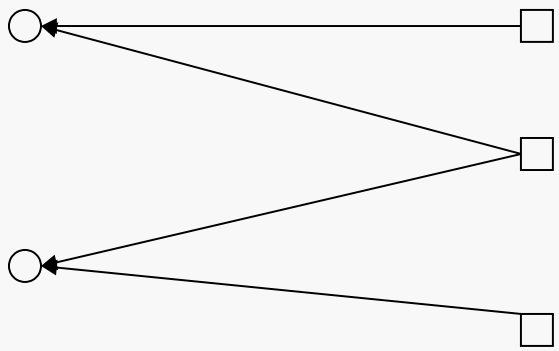
Nombre d'itérations de DPSV

Lemme 3: A chaque itération les prix sont de la forme a/b où

$$b \leq \Delta = n.U^n \quad \text{où } U = Max_{i,j}\ u_{i,j}$$

$$\frac{u_{1,1}}{p_1} = \frac{u_{1,2}}{p_2}$$

$$\frac{u_{2,1}}{p_2} = \frac{u_{2,3}}{p_3}$$



$$p_3 = \frac{u_{2,3}}{u_{2,2}} . \frac{u_{1,2}}{u_{1,1}} . p_1$$

$$m(\Gamma(S)) = p(S) = \sum_{j \in S} p_j = p_j . \sum_{k \in S} \frac{a_k}{b_k}$$

$$p_j = \frac{a}{b} = \frac{m(\Gamma(S))}{\sum_{k \in S} \frac{a_k}{b_k}} \text{ et } b \leq \Delta$$

Analyse de DPSV

Lemme 4: Au plus $m(B).n^2.\Delta^2.T_{MaxFlot}$

$p_j = \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ et $b,d \leq \Delta$ alors $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{\Delta^2}$

Algorithme Pseudo-polynomial.

Version Polynomiale:

•Figer S tel que:

$S^* \subseteq S \subseteq A, \quad p(S)+\varepsilon \leq m(\Gamma(S)) \leq p(S)+|S|.\varepsilon$

•Augmenter les prix de ε

•Surplus $\leq n.\varepsilon$

Version polynomiale de DPSV

Version Polynomiale: $\varepsilon = \frac{m(B)}{2n}$

- DPSV implique le surplus est $\leq n.\varepsilon = \frac{m(B)}{2}$

- Diviser ε par 2 et après i itérations le surplus est $\leq \frac{m(B)}{2^i}$

- Après $O(\log(m(B).\Delta^2))$ surplus $\frac{m(B)}{2^i} \leq \frac{1}{\Delta^2}$

- Appliquer DPSV avec $\varepsilon = 0$

II. 3 Valeur de l'Information XML

Testers for Regular tree languages , Mdr and Magniez, ICALP 2004

Valeur de l'information: développements en théorie des jeux et en Informatique.

Informatique: Pagerank, valeur relative (Google News),….

Problème: Etant donné une DTD, et un fichier F dans le langage XML , quelle est la distance dist(DTD,F)?

Version simplifiée: étant donné une expression régulière R et un mot x, quelle est la distance dist(R,x)= $\text{Min}_{x' \varepsilon R}$ dist(x',x)?

X=000111001100

R=0*1* dist(R,X)=4 (2 si déplacement)

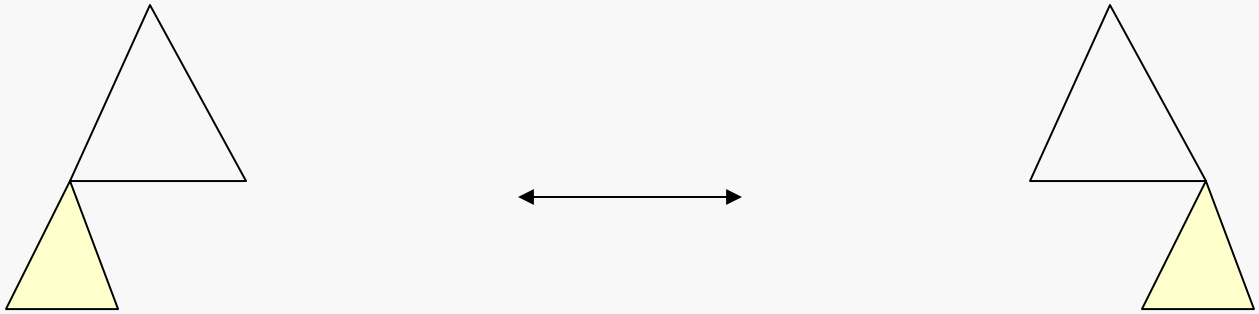
Distance d’édition sur les mots

1. Distance d’édition:

   Insertions, Effacements, Modifications
2. Distance d’édition avec déplacements (moves)

   01110000111100011001

   01110111100000011001
3. Distance d’édition avec déplacements sur les Arbres



Testeurs sur une classe K

Soit F une propriété sur une classe K de structures U

Un ε -testeur pour F est un algorithme probabiliste tel que:

- Si U |= F, A accepte
- Si U est ε loin de F, A rejette avec grande probabilité
- Temps(A) indépendant of n.

(Goldreich, Golwasser, Ron 1996 , Rubinfeld, Sudan 1994)

Testeur fournit aussi un correcteur en temps linéaire.

Testeurs pour les mots et les arbres

Résultats:

1. Langages réguliers d'arbres sont testables.

2. Equivalence approximative d'automates est polynomiale (version exacte est exponentielle)

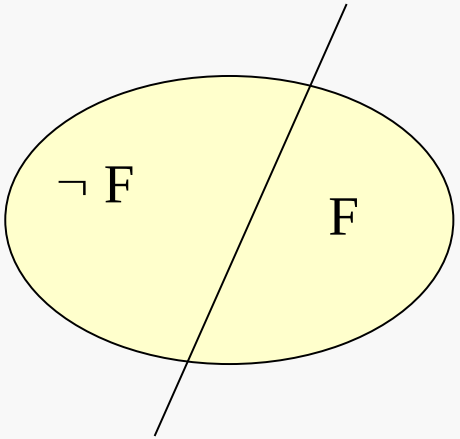
Conséquences:

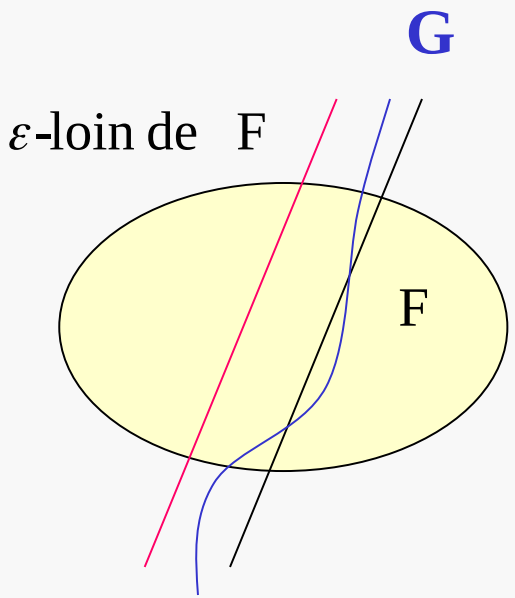
Validité approximative de fichiers XML peut être testée en O(1)
Fichiers XML peuvent être corrigés en temps O(n).

Satisfisfaisabilité et Equivalence approchés

1. Satisfaisabilité: $T \models F$
2. Satisfaisabilité approchée Tree $\models_{\varepsilon} F$
3. Equivalence approchée $F \equiv_{\varepsilon} G$

Classe K d'arbres





Approximations

1. Fonction $f(x) \in]0,1]$

$$f(x)(1-\varepsilon) \leq A(x) \leq f(x)(1+\varepsilon)$$

(ε,log n) Approximation

$$si \quad f(x) < \delta \Rightarrow \quad f(x)(1-\varepsilon) \leq A(x) \leq f(x)(1+\varepsilon)$$

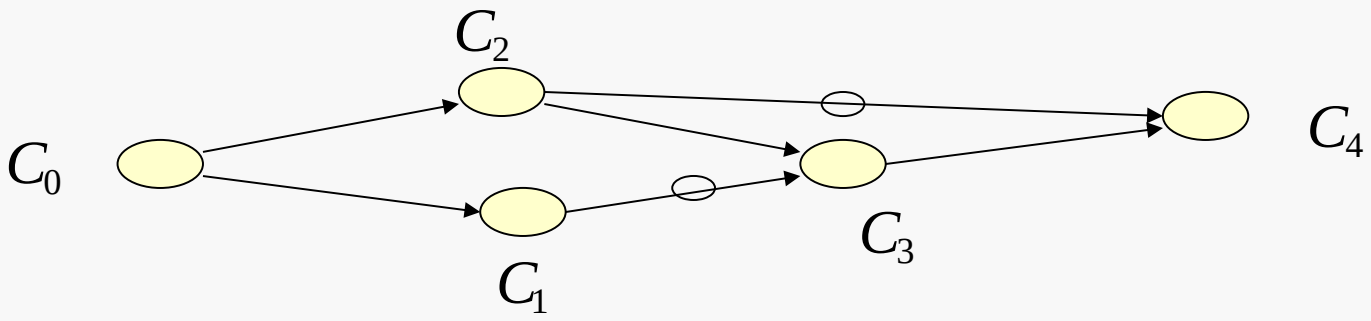
$$si \quad f(x) \geq \delta \Rightarrow \quad f(x)(1-\varepsilon.\log n) \leq A(x) \leq f(x)(1+\varepsilon.\log n)$$

2. Décision $f(x) \in \{0,1\}$

- Décider si $f(x) = 1$
- Décider si x est $\varepsilon - loin\ de\ f(x) = 1$

Testers on words

L is a regular language and A an automaton for L.



Admissible Z= $C_0.C_2.C_3.C_4$

init accept

A word W is Z-feasible if there are two states

$q \in C_i , q' \in C_j$ such that $q \xrightarrow{W} q'$ and $Z = ...C_i ...C_j...$

The Tester

Tester. Input : W,A, ε

For $i=1,\ldots,\log(m/\varepsilon)$

Choose $N_i = \Theta(2^{-i}.m^3/\varepsilon)$ random subwords w_j^i of size 2^{i+1}

For every admissible path Z:

If all w_j^i of W are Z feasible, ACCEPT.

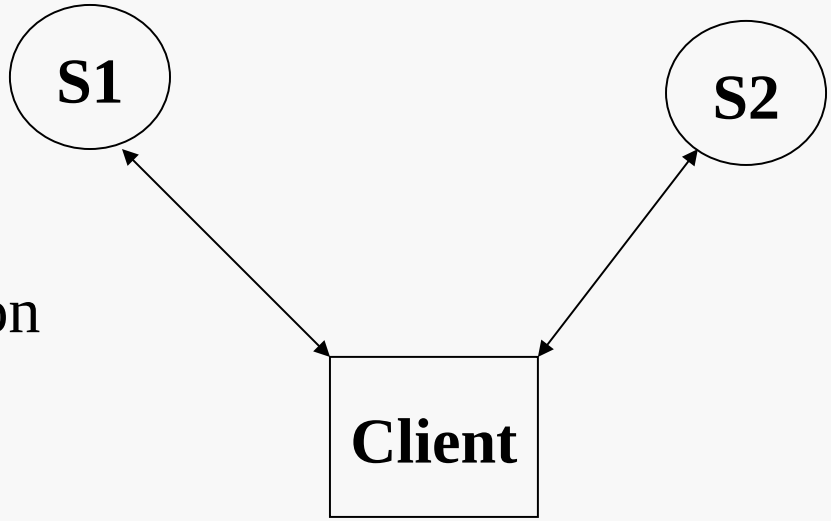
else REJECT.

Theorem: Tester(W,A, ε) is an ε -tester for L(A).

Jeux et valeur de l'information

Mesures classiques: Pagerank, …

Généralisation de la distance pour une DTD arbitraire.
Applications: P2P, data-exchange,…



Equilibres: définition d'une solution.

Calcul: approximer l'équilibre (Maxsat)

Conclusion

Partie 1

1. Exemples de Jeux et de Mécanismes
2. Jeux à somme nulle
3. Jeux matriciels: équilibres de Nash
4. Calcul des équilibres: Lemke-Howson

Partie 2: Importance des Modèles de calcul

1. Approximation d'équilibres

   Equilibres approchés (classiques) à N joueurs de support faible

1. Calcul polynomial d'équilibres de marché

   Non récursif (modèle numérique) ou P (modèle BSS)

2. Valeur relative pour XML

   NP-dur, non-approximable (classique), approximable (testeurs)