Augmentation de graphes sous Contraintes de Connexité et de Diamètre

Victor Chepoi et Yann Vaxès

LIF-Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille

Problème ACCD: (Augmentation sous Contraintes de Connexité et de Diamètre) Etant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$ et un entier positif D, ajouter à G un nombre minimum d'arêtes E' de telle sorte que le graphe augmenté $G' = (V, E \cup E')$ soit biconnexe et de diamètre au plus D.

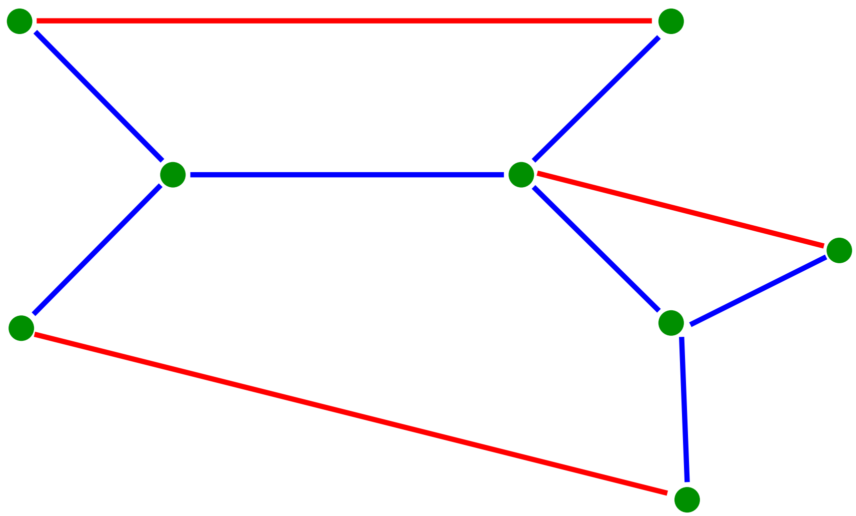
Problème ACD: (Augmentation sous Contrainte de Diamètre) Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif D, ajouter à G un nombre minimum d'arêtes E' de telle sorte que le graphe augmenté $G' = (V, E \cup E')$ soit de diamètre au plus D.

Applications aux réseaux de communications

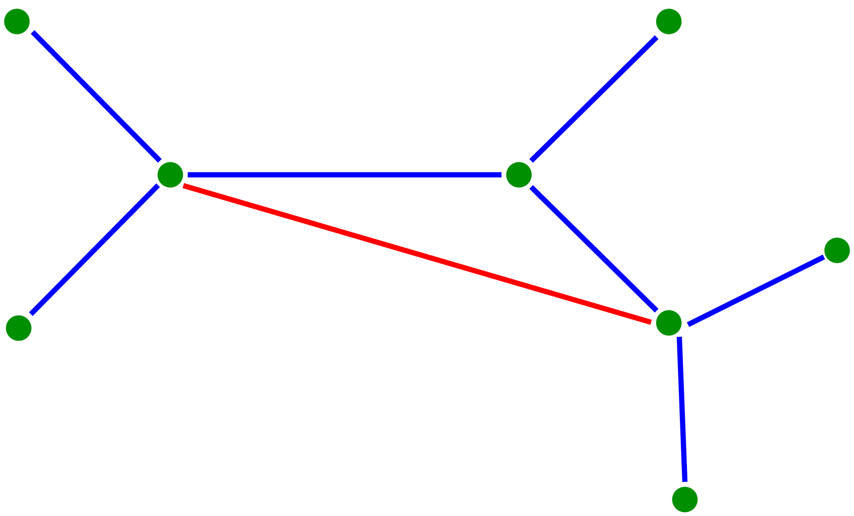
On cherche à améliorer un réseau existant en ajoutant des liaisons pour satisfaire

- des contraintes de diamètre pour borner le délai d'acheminement d'une communication.
- des contraintes de biconnexité pour résister aux pannes simples.

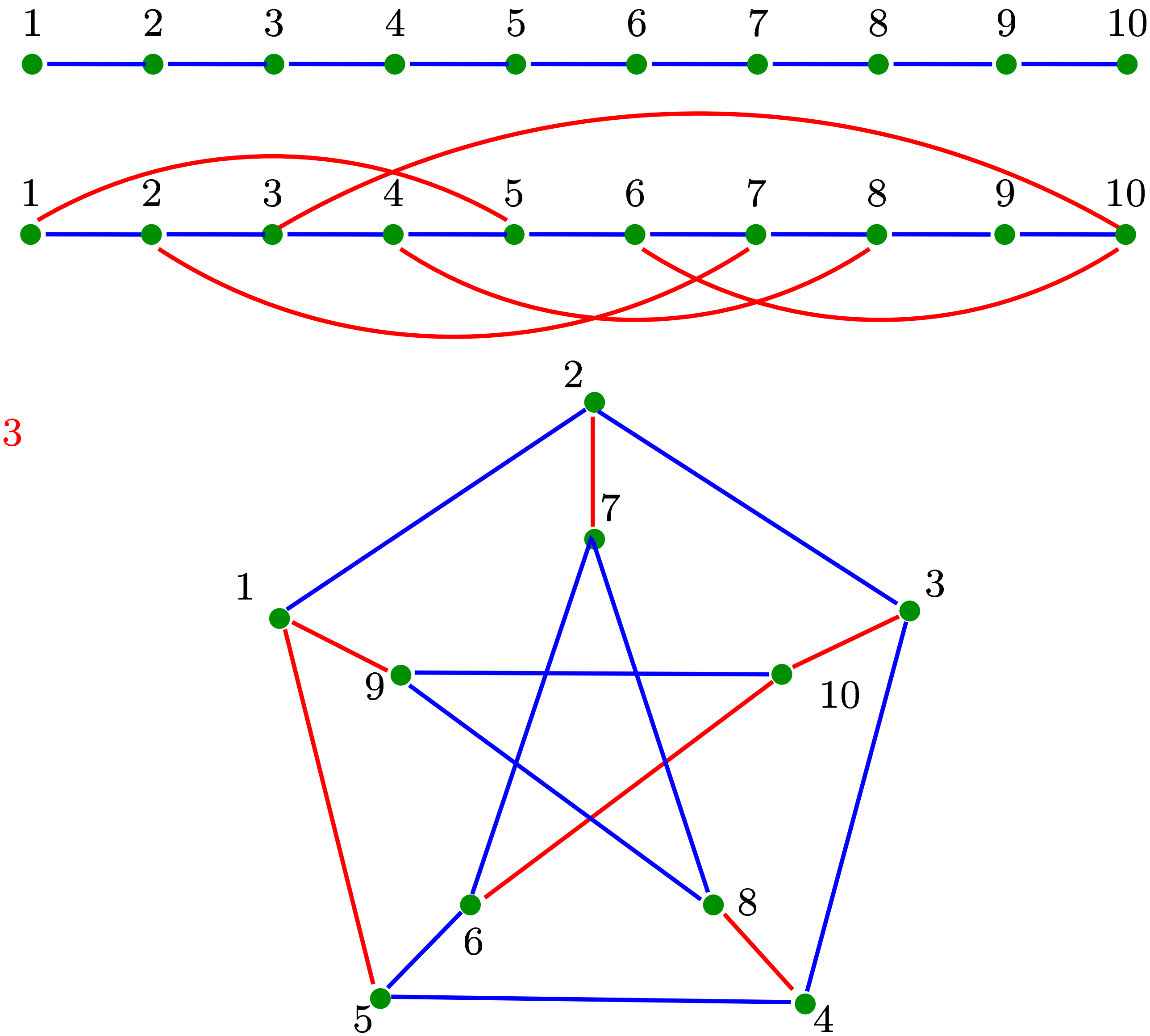
Exemples



ACCD, $D = 3$



ACD, $D = 3$



ACD, $D = 3$

Définitions

- distance $d_G(u, v)$ le nombre minimum d'arêtes dans une chaîne entre u et v
- excentricité $e_G(u) := \max \{d_G(u, v) : v \in V\}$
- diamètre $\mathrm{diam}_G(u) :=$ plus grande excentricité
- rayon $\mathrm{rad}_G(u) :=$ plus petite excentricité
- boule de centre u et de rayon k
  $B(u, k) := \{v \in V : d_G(u, v) \leq k\}$

Problèmes voisins

Problème ACR: (Augmentation sous Contrainte de Rayon) Soient un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif R, ajouter à G un nombre minimum d'arêtes telles que le graphe augmenté ait un rayon $\leq R$.

Problème ACE: (Augmentation sous Contrainte d'Excentricité) Soient un graphe $G = (V, E)$, un sommet $v \in V$ et un entier positif R, ajouter à G un nombre minimum d'arêtes telles que dans le graphe augmenté l'excentricité de v soit $\leq R$.

Résultats

1. ACCD, ACD, ACR, ACE sont NP-difficiles pour chaque $D \geq 2$ et chaque $R \geq 2$ fixés. De plus, ils sont *au moins aussi difficiles à approximer* que le problème de couverture d'ensemble.

2. ACCD reste NP-difficile pour les forêts et les arbres

3. Pour les forêts et les arbres,

   (a) ACR et ACE peuvent être résolus respectivement en $O(|V|^2)$ et $O(|V|)$,

   (b) une solution optimale de ACR est une approximation avec un facteur 2 pour ACD avec $D = 2R$.

   (c) il existe un algorithme d'approximation avec un facteur 3 pour le problème ACCD avec D pair et avec un facteur 6 pour $D \geq 5$ impair.

Références

[1] A.A. Schoone, H.L. Bodlaender, and J. van Leeuwen, Diameter increase caused by edge deletion, *J. Graph Theory* **11** (1987), 409–427. (ACD est NP-difficile pour D=2)

[2] Ch.-L. Li, S.Th. McCormick, and D. Simchi–Levi, On the minimum-cardinality-bounded-diameter and the bounded-cardinality-minimum-diameter edge addition problems, *Operations Research Letters* **11** (1992), 303–308. (ACD est NP-difficile pour D=3)

[3] Y. Dodis, S. Khanna, Designing networks with bounded pairwise distance, *ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, May 1999. (un algorithme d'approximation avec un facteur $O(\log |V| \log D)$ pour ACD)

[4] V. Chepoi, Y. Vaxès, Augmenting trees to meet biconnectivity and diameter constraints, *Algorithmica*, **33** (2002) 243-262.

NP-complétude

Proposition. *Le problème ACCD reste NP-difficile pour les forêts et les arbres.*

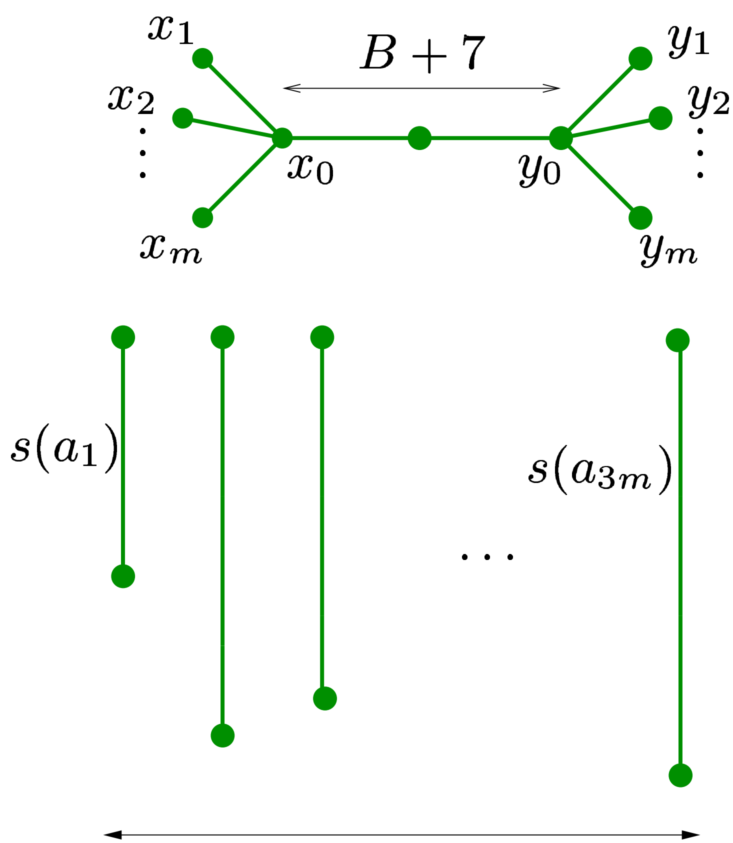
Transformation pseudo-polynomiale à partir de 3-PARTITION.

3-PARTITION. *Etant donné un ensemble A de $3m$ éléments, une borne $B \in \mathbb{Z}^+$, des taille $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ telles que*

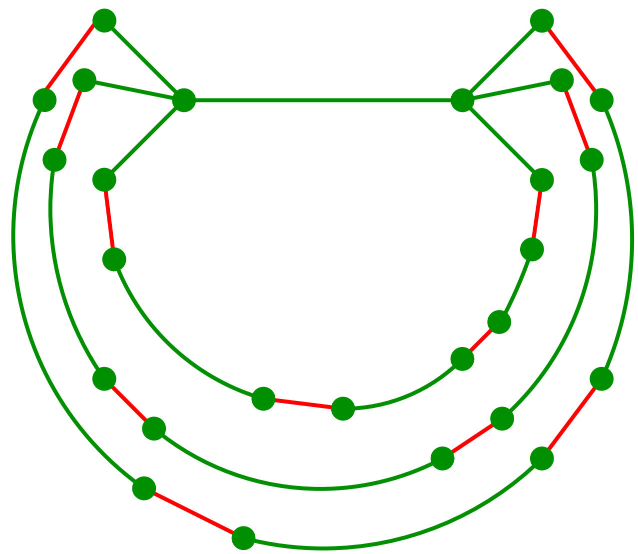
$$B/4 < s(a) < B/2 \text{ et } \sum_{a \in A} s(a) = mB$$

peut-on partitionner A en m ensembles disjoints $S_1, ..., S_m$ tels que, pour $1 \leq i \leq m, \sum_{a \in S_i} s(a) = B$?

$D = B + 6$



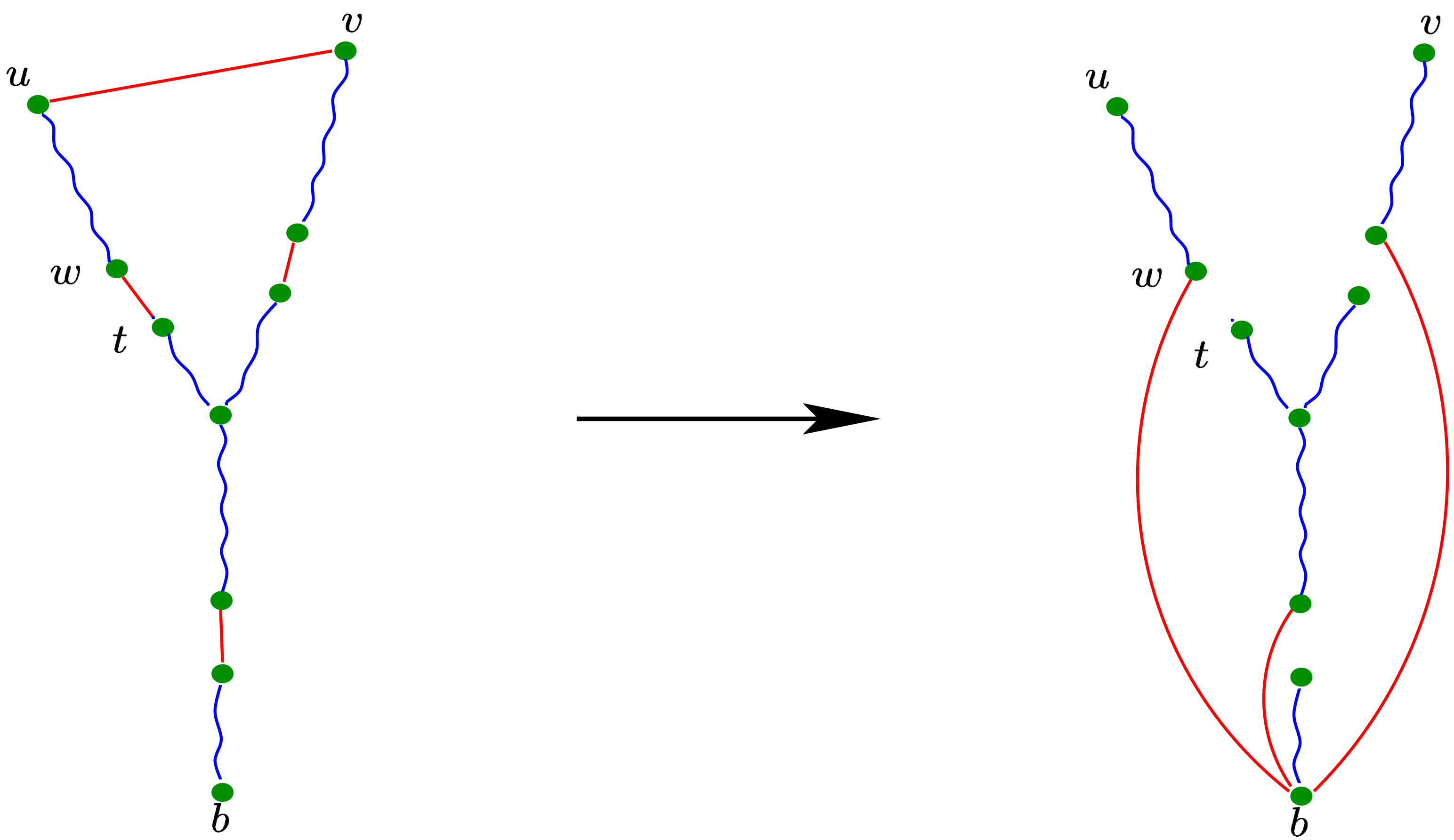
$3m$ chemins



m oreilles de longueur $2B + 13$

3-PARTITION a une réponse oui ssi
il existe une solution de ACCD avec $4m$ arêtes.

Lemme. *Il existe une solution optimale du problème $ACE(H, R, b)$ sous la forme d'une étoile (i.e. formée uniquement d'arêtes incidentes à b).*



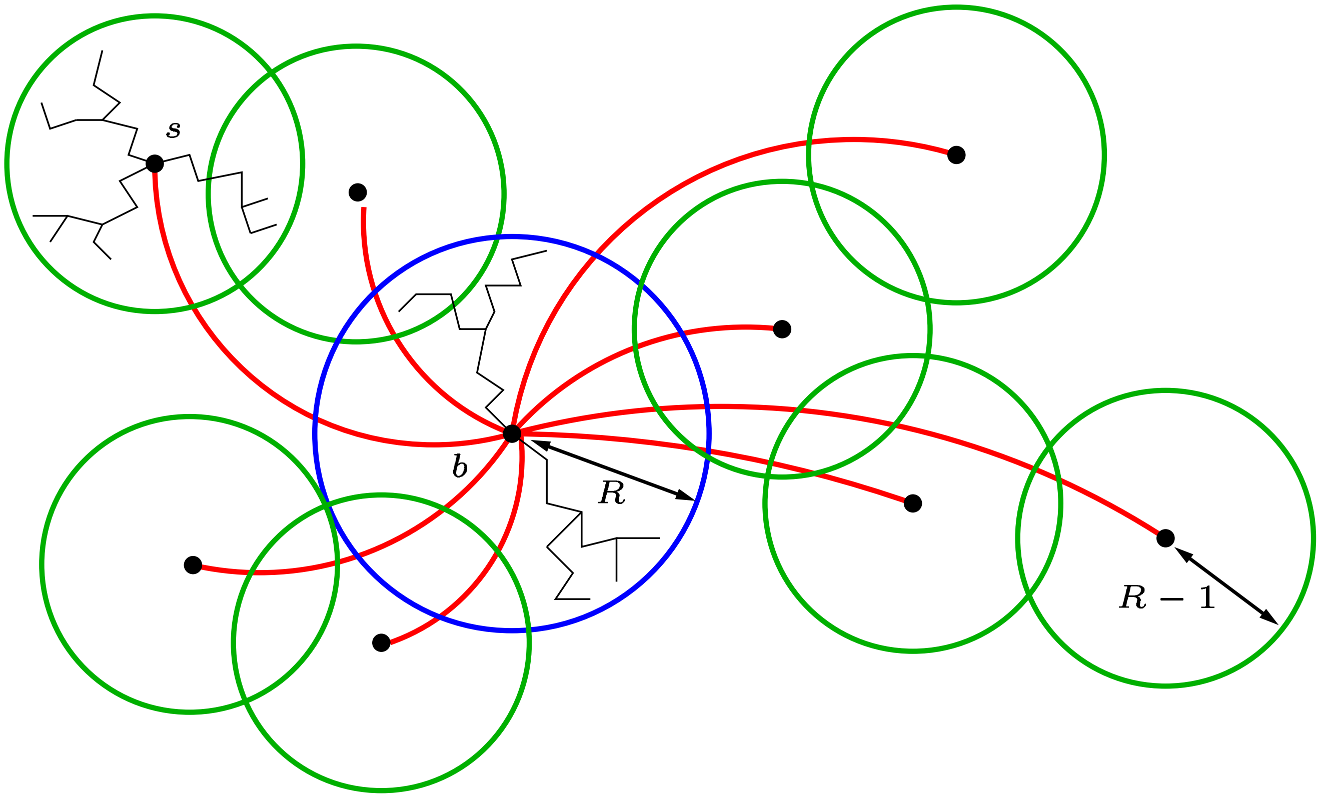
Algorithme d'approximation pour les forêts et les arbres ($D = 2R$)

k-domination : Soit un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble $X \subseteq V$, trouver une couverture de X avec un nombre minimum de boules de rayon k (il existe un algorithme linéaire pour les arbres).

Soit E' une augmentation sous la forme d'une étoile.

$S' := \{s : bs \in E'\}$.

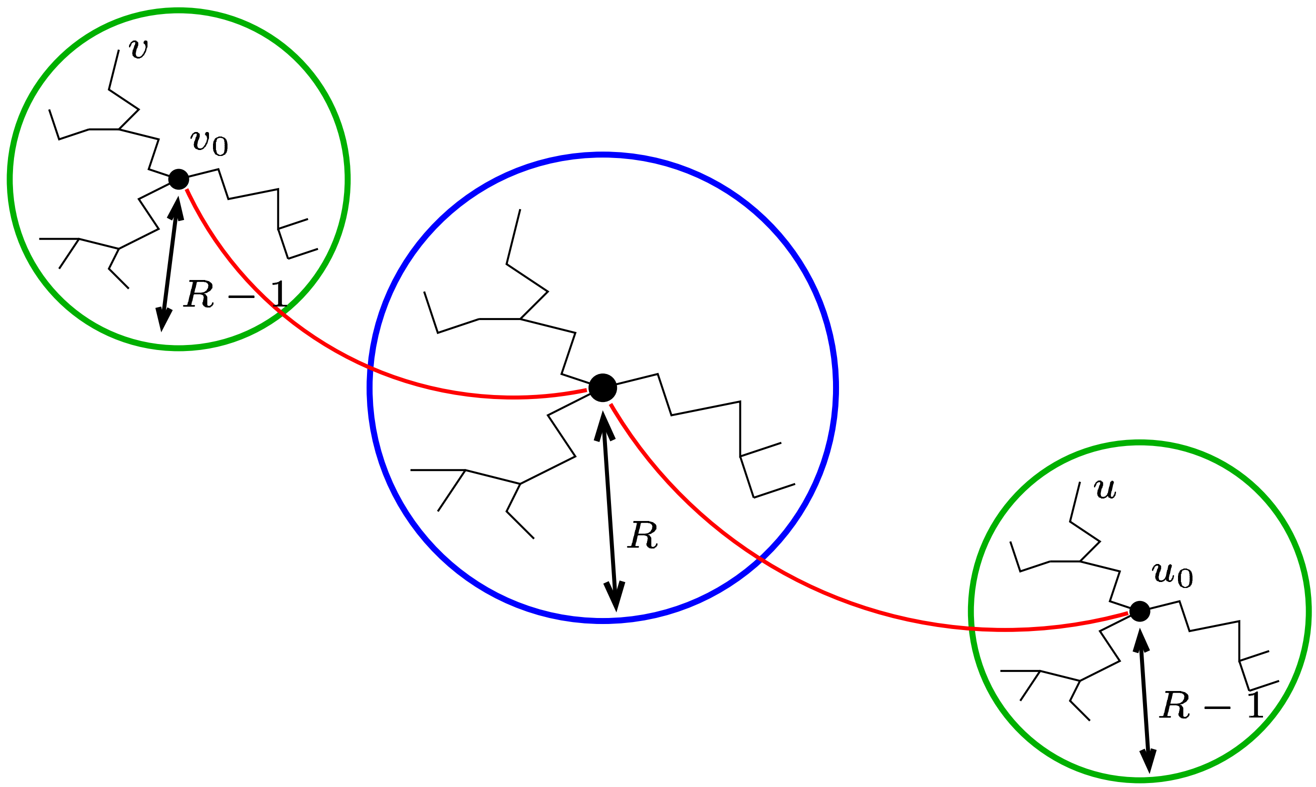
Lemme. E' est une solution de ACE(G, R, b) ssi S' est une solution du problème de $(R-1)$-domination sur G avec $X := V - B(b, R)$.



s
b
R
R − 1

Lemme. *Pour les forêts et les arbres, une solution optimale pour ACR est une 2-approximation pour ACD avec $D = 2R$.*

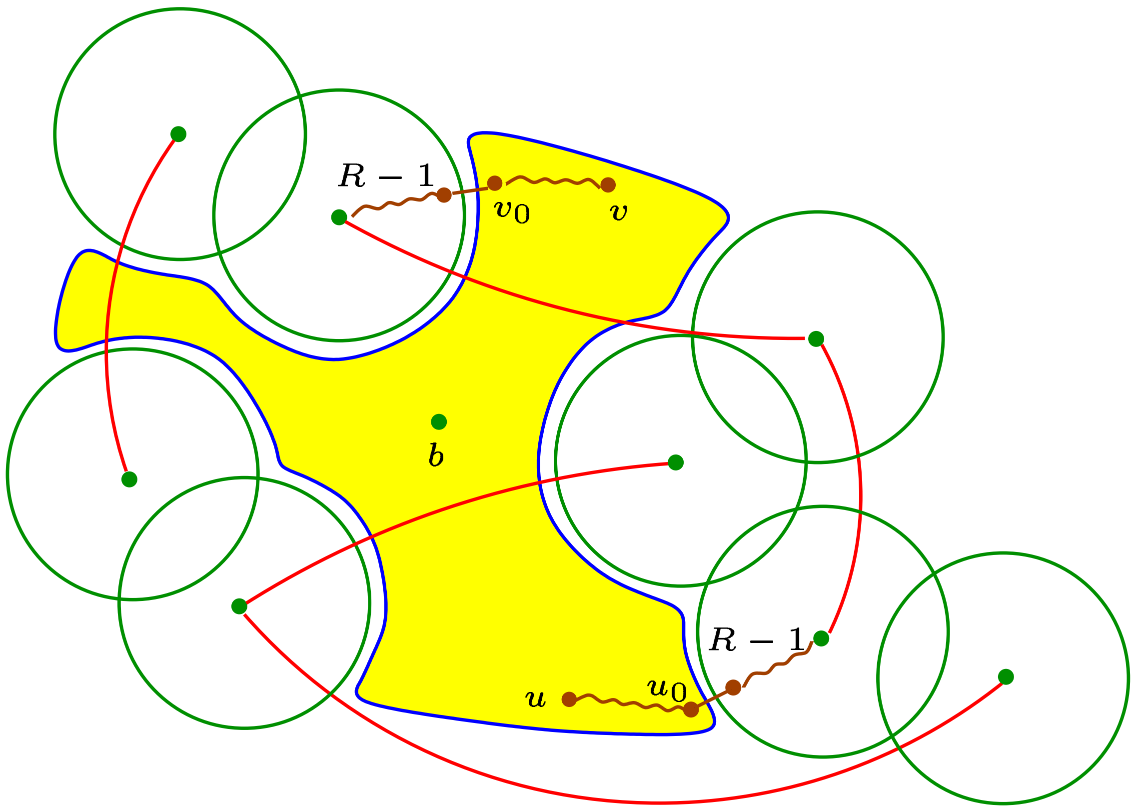
1. C'est une solution.



2. C'est une 2-approximation.

E' une solution optimale de ACD. P l'ensemble des extrémités de E'.

$Q := V - \bigcup \{B(p, R-1) : p \in P\}$.



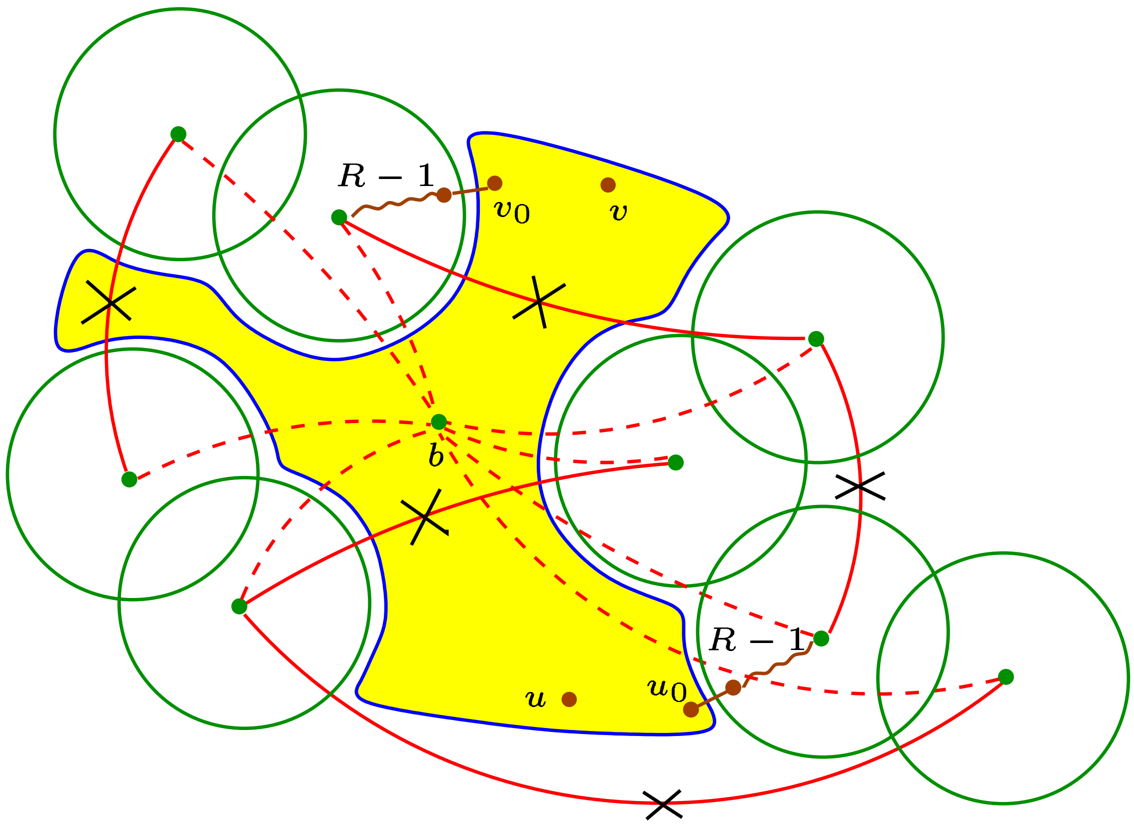
(a) $\mathrm{diam}_G(Q) \leq R$

(b) Q peut être couvert avec une boule $B(b, R)$

2. C'est une 2-approximation.

E' une solution optimale de ACD. P l'ensemble des extrémités de E'.

$Q := V - \bigcup \{B(p, R-1) : p \in P\}$.



(a) $\mathrm{diam}_G(Q) \leq R$

(b) Q peut être couvert avec une boule $B(b, R)$

Proposition. *Il existe un algorithme d'approximation avec un facteur 4 pour ACCD avec D pair pour les forêts et les arbres.*

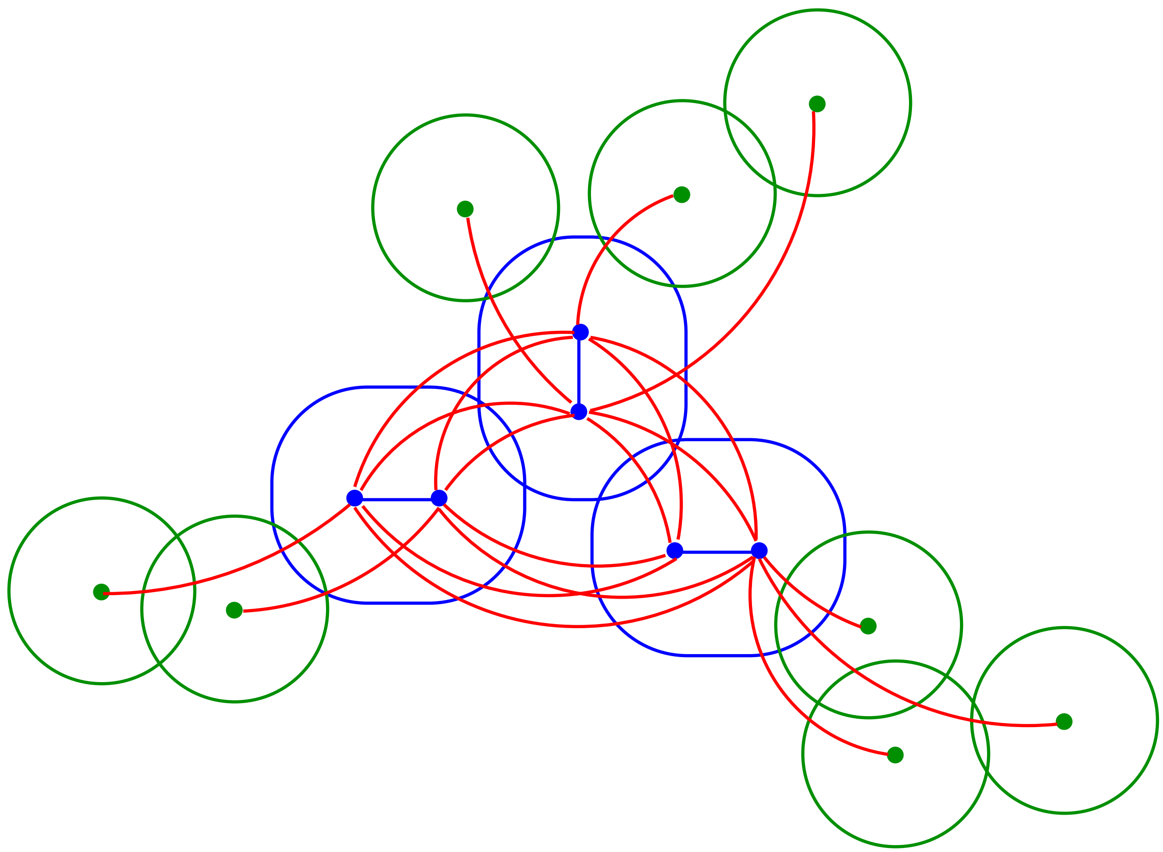
Résoudre indépendament ACD (en utilisant l'heuristique précédente) et le problème d'augmentation pour la biconnexité (il peut être résolu efficacement grâce à l'algorithme d'Eswaran et Tarjan, Augmentation problems, SIAM J. Computing **5** (1976).)

Algorithme d'approximation pour les arbres et les forêts (ACD avec $D = 2R + 1$)

La boule centrée sur l'arête uv de rayon k :
$EB(uv, k) := \{w \in V : d_G(u, w) \leq k \text{ ou } d_G(v, w) \leq k\}$.

Problème MC(T, R): (Couverture Mixte) Etant donné un arbre T et un entier positif R, trouver une couverture de T par n_1 boules de rayon $R - 1$ centrées sur des sommets et n_2 boules de rayon R centrées sur des arêtes avec $n_1 + 2n_2(n_2 - 1)$ minimum.

À partir d'une solution de $\mathrm{MC}(T, R)$, on peut construire une solution de ACD avec $D = 2R + 1$.



Proposition. *Une solution optimale de $MC(T, R)$ conduit à une solution approchée avec un facteur 6 pour ACD avec $D = 2R + 1$.*

Idée de preuve.

E' une solution optimale de ACD.

P l'ensemble des extrémités des arêtes de E', $n_1 = |P|$.

$Q := V - \bigcup \{B(p, R-1) : p \in P\}$.

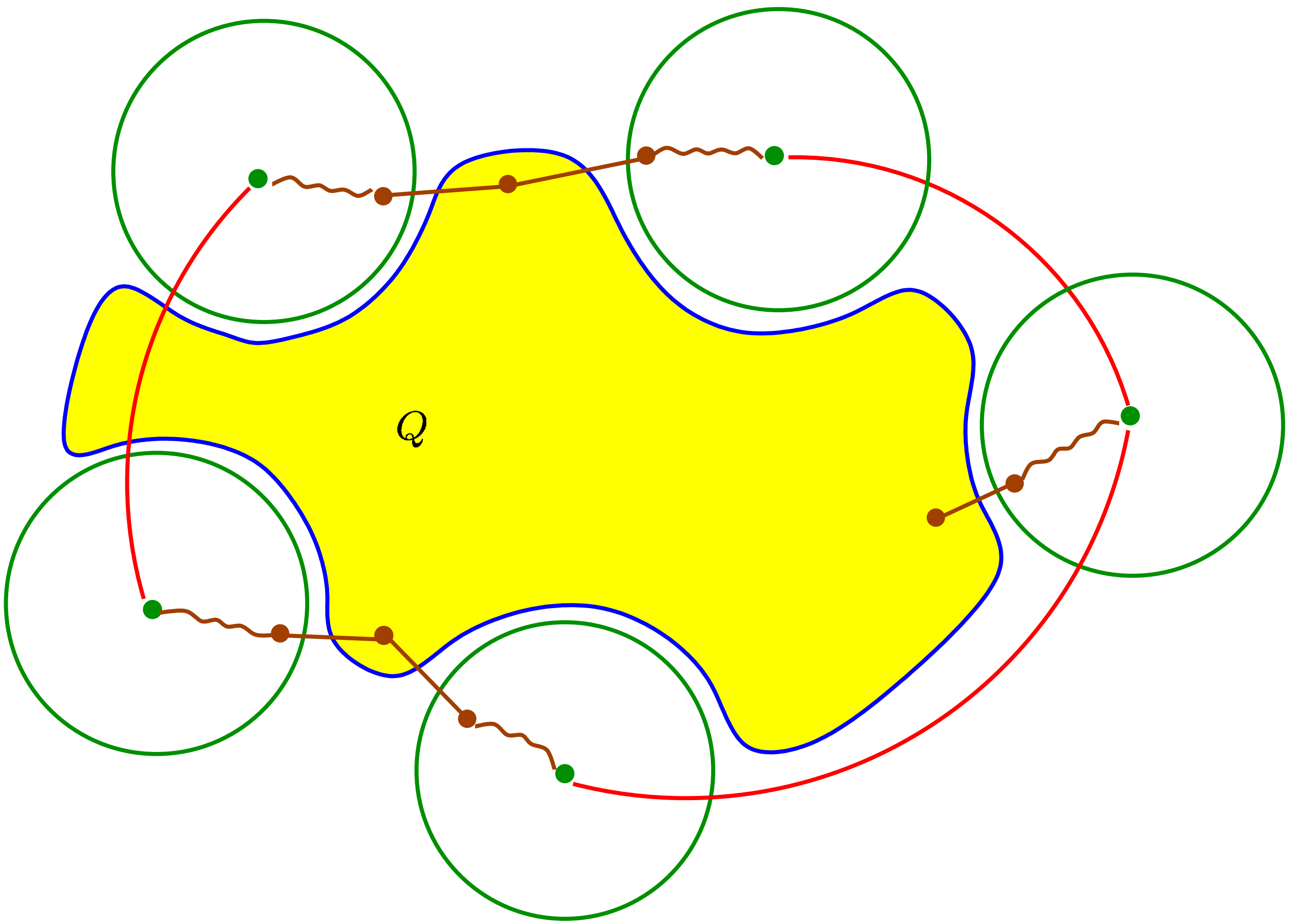
n_2 le nombre minimum de boules de rayon R centrées sur des arêtes pour couvrir Q.

E'' une augmentation obtenue à partir d'une solution optimale de MC(T, R).

On a

$$|E''| \leq n_1 + 2n_2(n_2 - 1) \leq 2|E'| + 4|E'| = 6|E'|$$

$n_1 \leq 2|E'|$ et $n_2(n_2-1)/2 \leq |E''|$



Questions

Est-ce que le Problème ACD peut-être résolu en temps polynomial pour les arbres (au moins avec D pair) ?

Est-ce que le Problème MC peut-être résolu en temps polynomial ?

Qu'est ce qui se passe si on impose deux chemins disjoints courts entre chaque paire de sommets ?

...

Approximation d'un arbre par un arbre de diamètre borné

Définition. Soit $T_1 = (V, E)$ et $T_2 = (V, E_2)$ deux arbres avec le même ensemble de sommets V. La distance de Hamming entre T_1 et T_2 est $\delta(T_1, T_2) = |E_1 \Delta E_2|$.

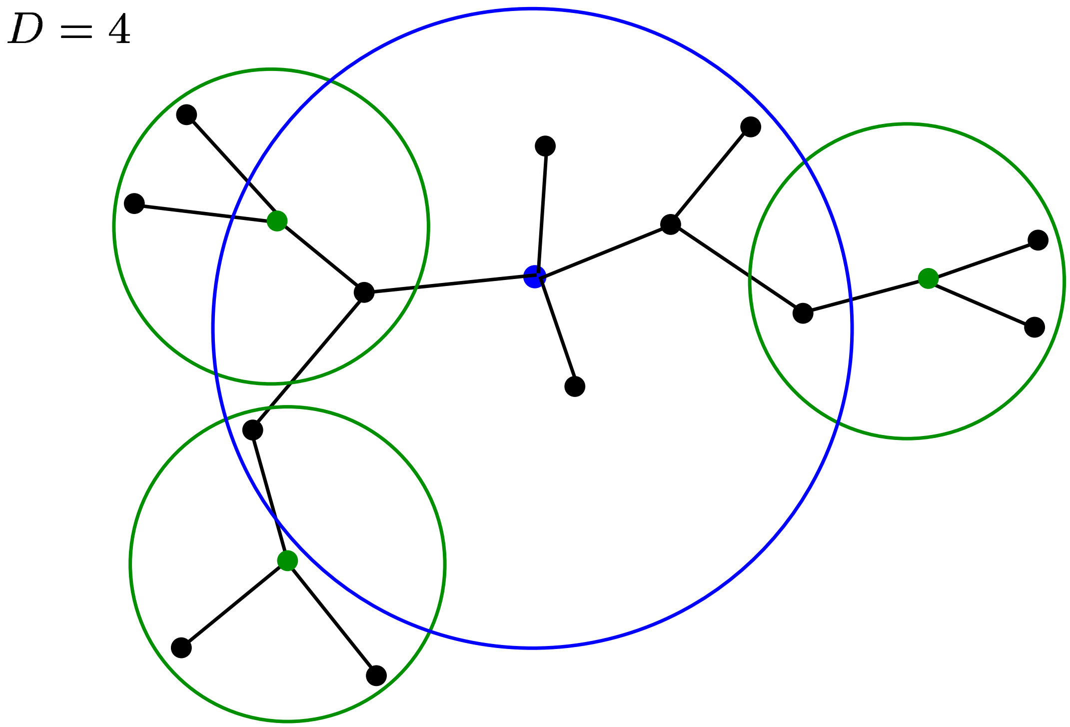
Formulation. Etant donné un arbre T, et un entier $D > 0$, trouver un arbre T^* de diamètre au plus D à distance (de Hamming) minimum de T.

Proposition. *Un arbre optimal T^* peut être trouver en temps $O(|V^2|)$ pour D pair et $O(|V^3|)$ pour D impair.*

Algorithme.

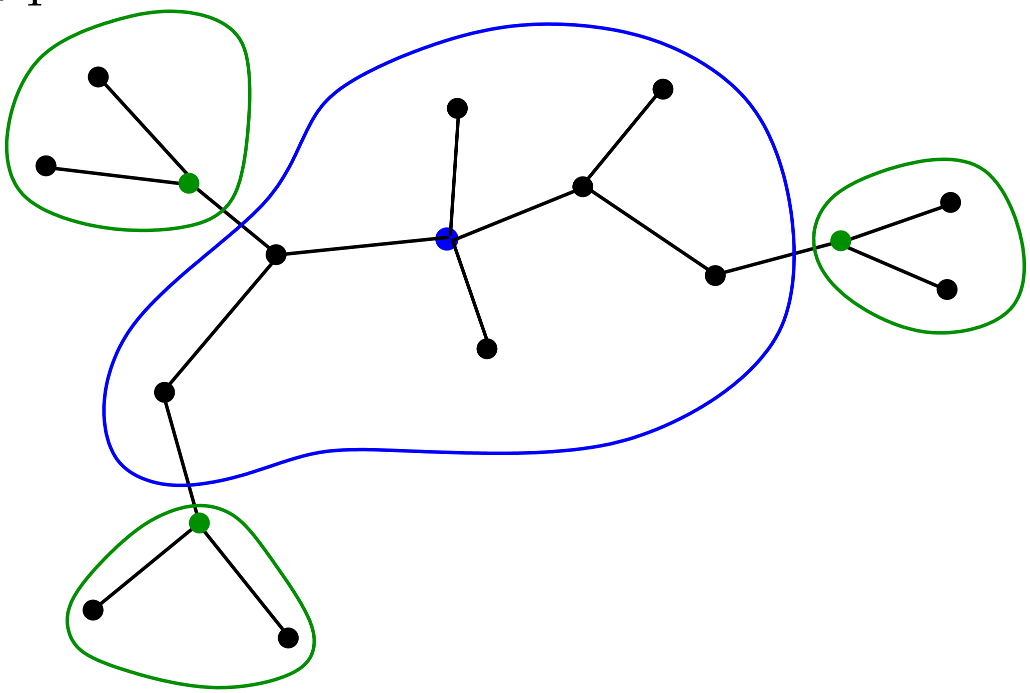
- Calculer une solution optimale E' de ACR.
- Transformer la couverture correspondante en partition.
- Supprimer toutes les arêtes qui connectent des parties différentes et ajouter les arêtes de E'.

Calculer une solution optimale E' de ACR.



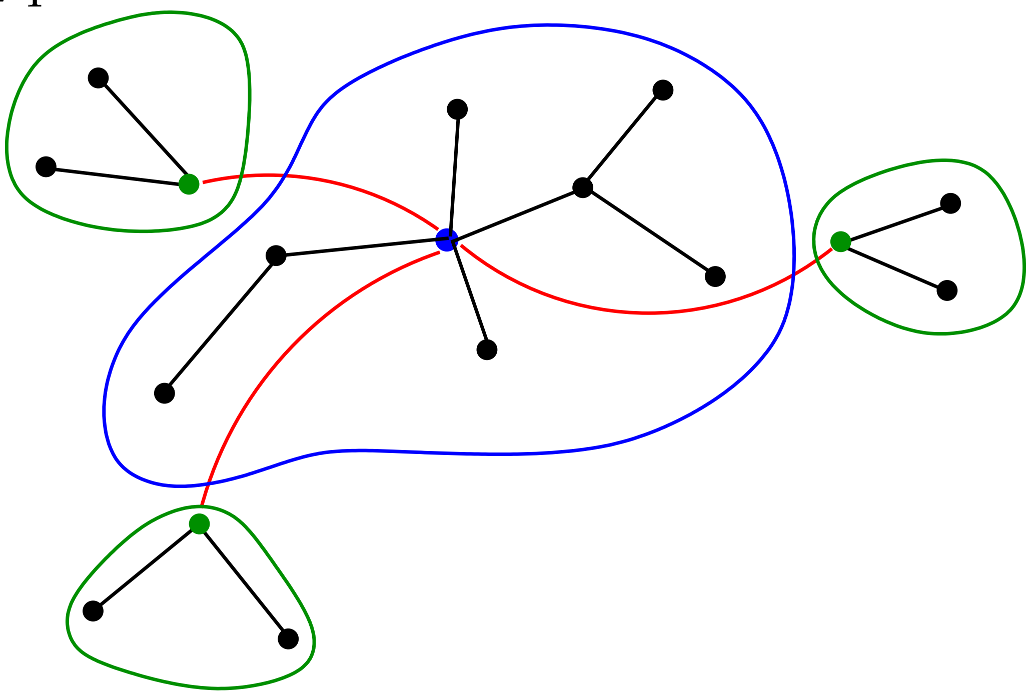
Transformer la couverture correspondante en partition.

$D = 4$



Supprimer toutes les arêtes qui connecte des parties différentes et ajouter les arêtes de E'.

$D = 4$



Optimalité

- Soit T_0 un arbre optimal.
- L'excentricité d'un sommet central de T_0 est au plus R.
- L'ensemble E'_0 des nouvelles arêtes de T_0 est une solution pour ACR.
- Donc $|E'_0| \geq |E'|$ (par l'optimalité de E' pour ACR).