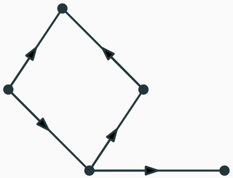
Conjecture de Sands Sauer Woodrow

William Lochet

University of Bergen, Norway

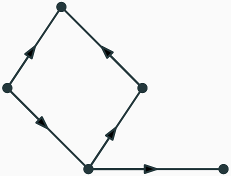
Définition (Graphes orientés)
Un graphe orienté est une paire $D = (V, A)$:

- *V est un ensemble de sommets.*
- *A est un ensemble d'arcs, qui sont des couples de sommets.*



Définition (Graphes orientés)
Un graphe orienté est une paire $D = (V, A)$:

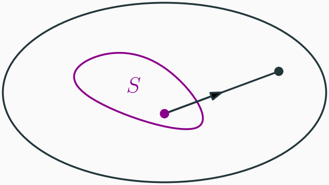
- *V est un ensemble de* *sommets*.
- *A est un ensemble* *d'arcs*, *qui sont des couples de sommets.*



- $N^+(x)$ est le voisinage sortant d'un sommet ($N^+[x]$ avec x)
- $N^-(x)$ est le voisinage entrant d'un sommet ($N^-[x]$ avec x)

Domination

- $S \subset V(D)$ est *dominant* si pour tout $x \in V(D)$, $\exists s \in S$ tel que $s \in N^{-}[x]$.



- $\gamma(D)$ est la taille du plus petit ensemble dominant.

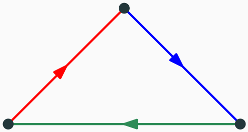
Théorème (Sands, Sauer et Woodrow 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de 2 ordres partiels est dominé par un ensemble indépendant

- Un indépendant est un ensemble de sommets sans arcs.
- Les arcs peuvent être partitionnés en deux ordres partiels.

Sands Sauer Woodrow

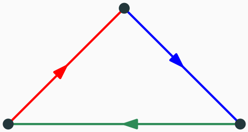
Théorème (Sands, Sauer et Woodrow 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de 2 ordres partiels est dominé par un ensemble indépendant

- Un indépendant est un ensemble de sommets sans arcs.
- Les arcs peuvent être partitionnés en deux ordres partiels.
- Plus le cas pour 3 ordres partiels



Théorème (Sands, Sauer et Woodrow 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de 2 ordres partiels est dominé par un ensemble indépendant

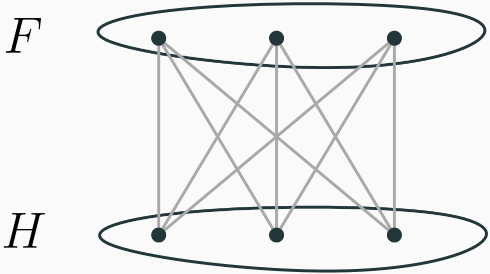
- Un indépendant est un ensemble de sommets sans arcs.
- Les arcs peuvent être partitionnés en deux ordres partiels.
- Plus le cas pour 3 ordres partiels



Conjecture (Sands, Sauer et Woodrow)
Tout graphe orienté qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ ensembles indépendants.

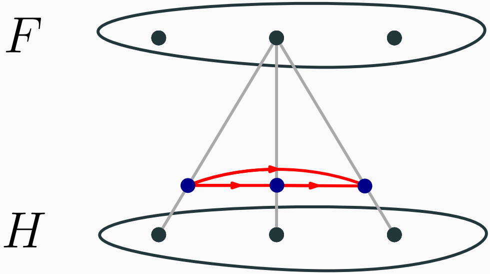
Mariages stables

Théorème (Gale et Shapley, 1962)
Toute instance des mariages stables admet une solution.



On a un ensemble d'hommes et de femmes

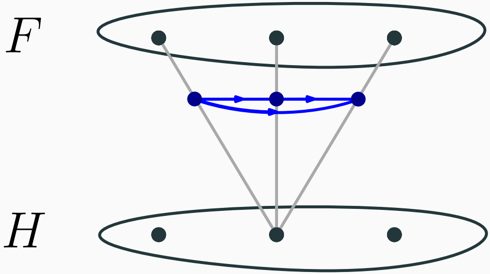
Théorème (Gale et Shapley, 1962)
Toute instance des mariages stables admet une solution.



Chaque femme donne un ordre total de préferences

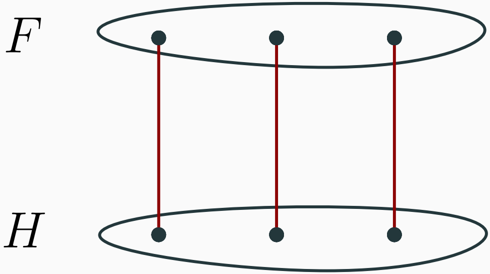
Mariages stables

Théorème (Gale et Shapley, 1962)
Toute instance des mariages stables admet une solution.



Chaque homme donne un ordre total de préferences

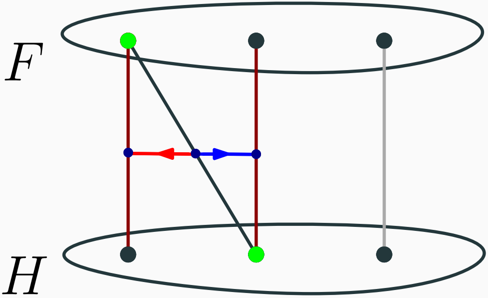
Théorème (Gale et Shapley, 1962)
Toute instance des mariages stables admet une solution.



Un couplage consiste a marier les hommes et les femmes

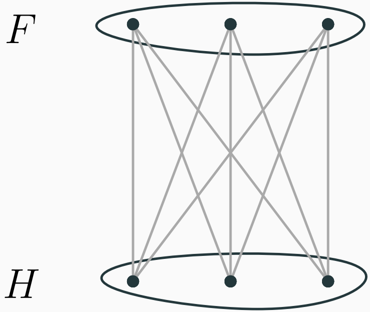
Mariages stables

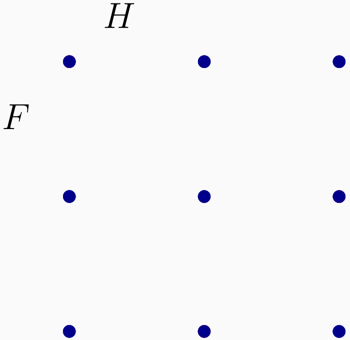
Théorème (Gale et Shapley, 1962)
Toute instance des mariages stables admet une solution.



Il est stable, si aucun couple homme-femme ne veut se marier

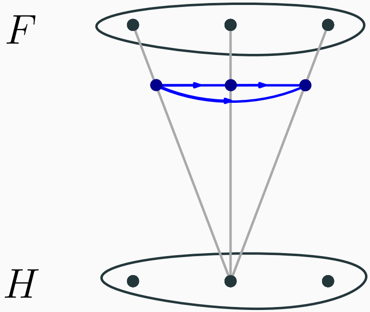
Ensemble indépendant

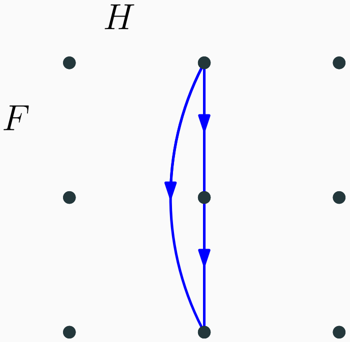




On définit un **graphe orienté** de taille $|H| \times |F|$.

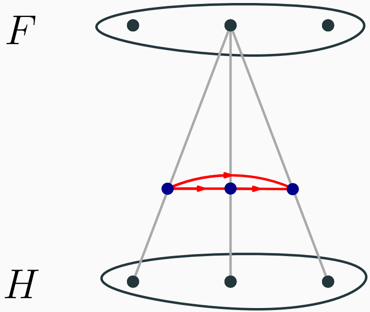
Ensemble indépendant

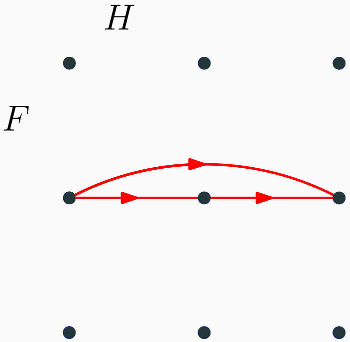




Colonne : **tournoi transitif** représentant les choix des hommes.

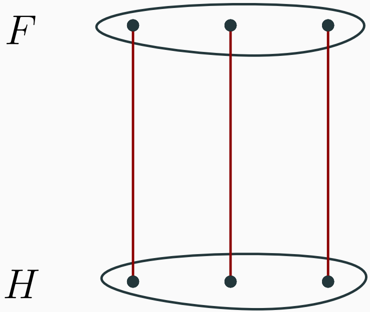
Ensemble indépendant

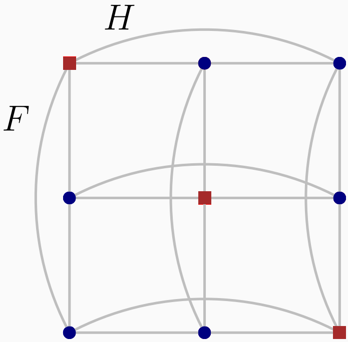




Ligne : **tournoi transitif** représentant les choix des femmes.

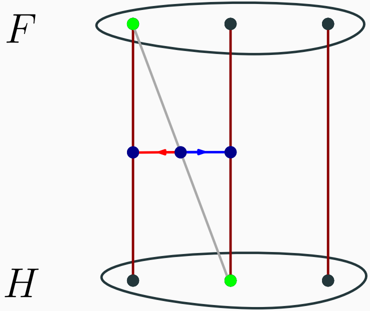
Ensemble indépendant

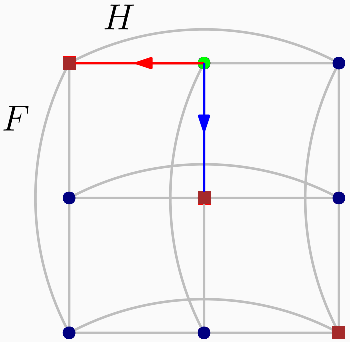




Un couplage correspond à un **ensemble indépendant**.

Ensemble indépendant

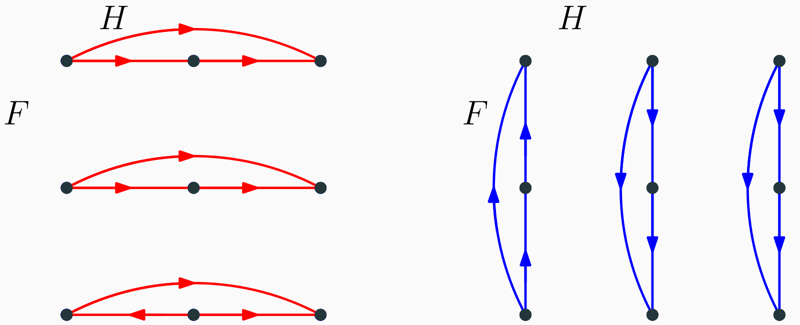




Le couplage est stable si cet ensemble est **dominant**.

Union d'ordres partiels

Le graphe défini est l'union de 2 ordres partiels



Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de deux ordres partiels a un ***ensemble indépendant dominant****.*

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un **ensemble indépendant dominant**.*

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un **ensemble indépendant dominant**.*

- S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu.

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un **ensemble indépendant dominant**.*

- S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu.
- S est dominant, mais pas indépendant dans D.

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un **ensemble indépendant dominant**.*

- S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu.
- S est dominant, mais pas indépendant dans D.
- S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S et $S_2 = S - S_1$.

Algorithme

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un **ensemble indépendant dominant**.*

- S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu.
- S est dominant, mais pas indépendant dans D.
- S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S et $S_2 = S - S_1$.
- On supprime S_2 de D et considère à nouveau S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu dans $D - S_2$.

Algorithme

Théorème (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout graphe orienté D qui est l'union de deux ordres partiels a un ***ensemble indépendant dominant****.*

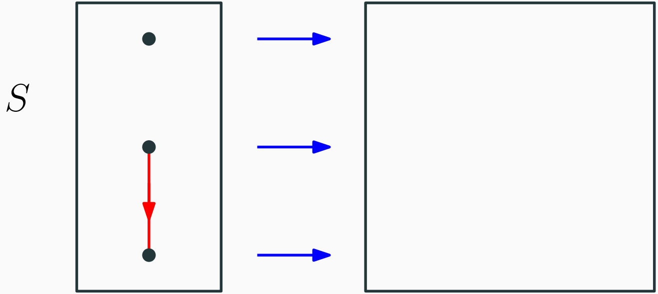
- S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu.
- S est dominant, mais pas indépendant dans D.
- S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S et $S_2 = S - S_1$.
- On supprime S_2 de D et considère à nouveau S l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre bleu dans $D - S_2$.
- On recommence jusqu'à ce que S soit indépendant.

Verification

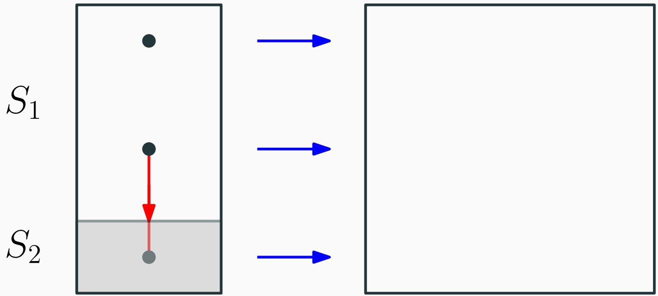
Lemme
A tout instant, S_1 *l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans* S *domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.*

Verification

Lemme
A tout instant, S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.

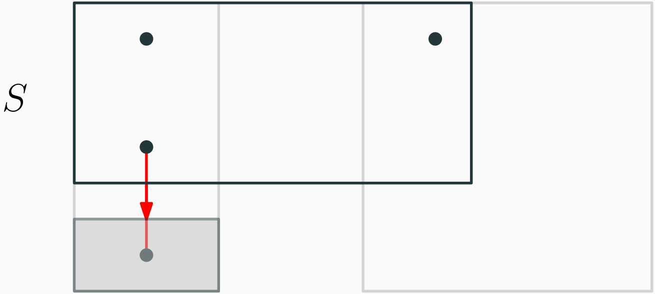


Lemme
A tout instant, S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.



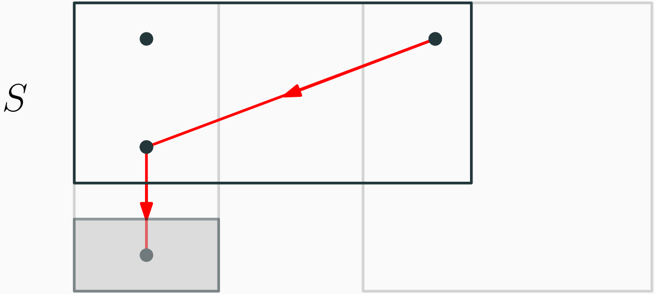
Verification

Lemme
A tout instant, S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.



Verification

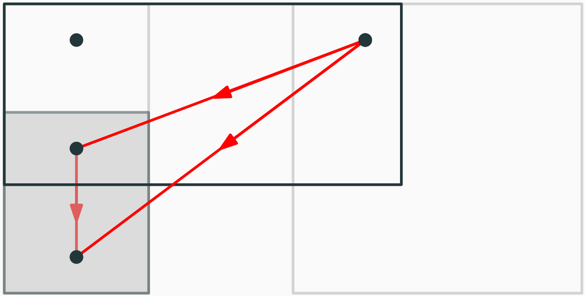
Lemme
A tout instant, S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.



Lemme

A tout instant, S_1 l'ensemble des elements minimaux pour l'ordre rouge dans S domine, en rouge, l'ensemble des élements supprimés par l'algorithme.

S_1



Conjecture

Conjecture (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ ensembles indépendants.

- Conjecture ouverte dès $k = 3$.

Conjecture

Conjecture (Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout graphe orienté qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ ensembles indépendants.

- Conjecture ouverte dès $k = 3$.

Question
Qu'en est-il pour les tournois (graphes complets orientés)?

Conjecture (Erdős, Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout ***tournoi*** *qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$* ***sommets****.*

Conjecture (Erdős, Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
*Tout **tournoi** qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ **sommets**.*

- Pour $k = 2$, revient à dire que le tournoi est transitif
- Le cas $k = 3$ est resté ouvert très longtemps

Conjecture (Erdős, Sands, Sauer et Woodrow, 1982)
Tout ***tournoi*** *qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$* ***sommets****.*

- Pour $k = 2$, revient à dire que le tournoi est transitif
- Le cas $k = 3$ est resté ouvert très longtemps

Théorème (Bousquet, L. et Thomassé, 2019)
Pour tout tournoi T qui est l'union de k ordres partiels, $\gamma(T) = f(k)$.

Domination dans les tournois

Théorème
Pour tout n, il existe un tournoi T de taille n tel que

$\gamma(T) \geq log(n)$

Domination dans les tournois

Théorème
Pour tout n, il existe un tournoi T de taille n tel que $\gamma(T) \geq log(n)$

LP du plus petit dominant:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V(T)} w(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x \in N^-[y]} w(x) \geq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & w(x) \in \{0,1\} \end{array}$$

Domination dans les tournois

Théorème
Pour tout n, il existe un tournoi T de taille n tel que $\gamma(T) \geq log(n)$

LP du plus petit dominant:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V(T)} w(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x \in N^-[y]} w(x) \geq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & w(x) \in \{0,1\} \end{array}$$

- Si $w(x) \in [0,1]$, on parle de domination fractionnaire.
- On note $\gamma_f(T)$ la solution optimale.

Domination dans les tournois

Théorème
Pour tout n, il existe un tournoi T de taille n tel que $\gamma(T) \geq log(n)$

LP du plus petit dominant:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V(T)} w(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x \in N^-[y]} w(x) \geq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & w(x) \in \{0,1\} \end{array}$$

- Si $w(x) \in [0,1]$, on parle de domination fractionnaire.
- On note $\gamma_f(T)$ la solution optimale.

Théorème
Pour tout tournoi T, $\gamma_f(T) \leq 2$.

Dual

On considère alors le dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & \sum_{v \in V(T)} z(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x \in N^+[y]} z(x) \leq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & z(x) \in [0,1] \end{array}$$

Par le théorème de dualité: $OPT(Dual) = OPT(Primal)$.

Dual

On considère alors le dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & \sum_{v \in V(T)} z(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x \in N^+[y]} z(x) \leq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & z(x) \in [0,1] \end{array}$$

Par le théorème de dualité: $OPT(Dual) = OPT(Primal)$.

Lemme
Pour toute fonction de poids z, il existe un sommet x tel que $z(N^+(x)) \geq z(N^-(x))$

Dual

On considère alors le dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & \sum_{v\in V(T)} z(v) \\ \text{sachant que:} & \sum_{x\in N^+[y]} z(x) \leq 1 \quad \forall y \in V(D) \\ & z(x) \in [0,1] \end{array}$$

Par le théorème de dualité: $OPT(Dual) = OPT(Primal)$.

Lemme
Pour toute fonction de poids z, il existe un sommet x tel que $z(N^+(x)) \geq z(N^-(x))$

- Comme pour tout $x, V := N^+(x) \cup N^-(x) \cup \{x\}$, on a que $z(N^+[x]) \geq \frac{OPT(Dual)}{2}$
- On en déduit $OPT(Primal) \leq 2$.

Preuve du lemme

Lemme
Pour toute fonction de poids z, il existe un sommet x tel que $z(N^+(x)) \geq z(N^-(x))$

Par contradiction, si $z(N^+(x)) < z(N^-(x))$ pour tout $x \in V(T)$:

$$\textstyle\sum_{v \in V} z(v) \cdot z(N^-(v)) \quad > \sum_{v \in V} z(v) \cdot z(N^+(v))$$

Preuve du lemme

Lemme
Pour toute fonction de poids z, il existe un sommet x tel que $z(N^+(x)) \geq z(N^-(x))$

Par contradiction, si $z(N^+(x)) < z(N^-(x))$ pour tout $x \in V(T)$:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{v \in V} z(v) \cdot z(N^-(v)) &> \textstyle\sum_{v \in V} z(v) \cdot z(N^+(v)) \\ \textstyle\sum_{v \in V} z(v) \cdot \left(\sum_{x \in N^-(v)} z(x) \right) &> \textstyle\sum_{v \in V} z(v) \cdot \left(\sum_{y \in N^+(v)} z(y) \right) \end{aligned}$$

Preuve du lemme

Lemme
Pour toute fonction de poids z, il existe un sommet x tel que $z(N^+(x)) \geq z(N^-(x))$

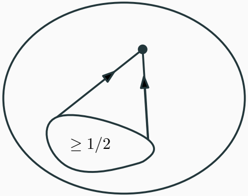
Par contradiction, si $z(N^+(x)) < z(N^-(x))$ pour tout $x \in V(T)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} z(v) \cdot z(N^-(v)) &> \sum_{v\in V} z(v) \cdot z(N^+(v)) \\
\sum_{v\in V} z(v) \cdot \left(\sum_{x\in N^-(v)} z(x)\right) &> \sum_{v\in V} z(v) \cdot \left(\sum_{y\in N^+(v)} z(y)\right) \\
\sum_{vx\in A} z(v)z(x) &> \sum_{xy\in A} z(x)z(y)
\end{aligned}$$

Contradiction.

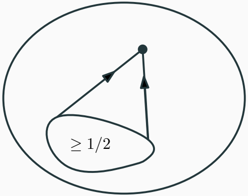
Utilisation

Proposition
T un tournoi: Il existe une distribution de probabilitée w sur $V(T)$ tel que: pour tout x, $w(N^-[x]) \geq 1/2$.



Soit S un ensemble de k sommets tiré aléatoirement selon w:

- $\mathbb{P}(x \leftarrow S) \geq 1 - (1/2)^k$
- $\mathbb{E}(N^+[S]) = \sum_x \mathbb{P}(x \leftarrow S) \geq n(1 - (1/2)^k)$



Proposition
T un tournoi: Il existe une distribution de probabilitée w sur $V(T)$ tel que: pour tout x, $w(N^-[x]) \geq 1/2$.

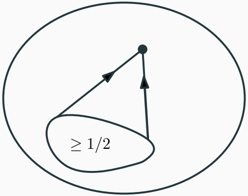
Soit S un ensemble de k sommets tiré aléatoirement selon w:

- $\mathbb{P}(x \leftarrow S) \geq 1 - (1/2)^k$
- $\mathbb{E}(N^+[S]) = \sum_x \mathbb{P}(x \leftarrow S) \geq n(1 - (1/2)^k)$

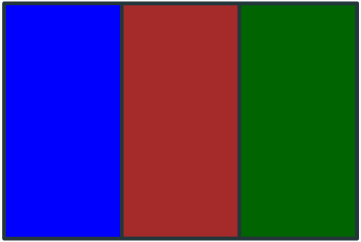
Lemma
T un tournoi sur n sommets et $\epsilon > 0$, il existe:

- *Un dominant de taille* $\log(n)$
- *Un ensemble de taille $f(\epsilon)$ qui domine $n(1-\epsilon)$ sommets*

Proposition
Soit T un tournoi, il existe une distribution de probabilité w sur $V(T)$ telle que : $\forall x$, $w(N^-[x]) \geq 1/2$.



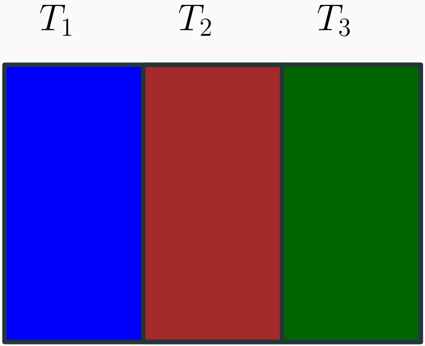
Si T est l'union de k ordres partiels, alors chaque sommet a degré entrant au moins $1/2k$ dans un ordre partiel.



T

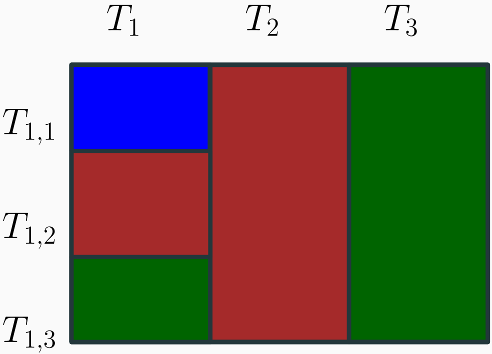
Preuve

Lemme
Soit T un tournoi qui est l'union de k ordres partiels, il existe une distribution de probabilité w sur $V(T)$ et une partition $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de $V(T)$ telles que pour tout i et $x \in T_i$, $w(N_i^-[x]) \geq 1/2k$.



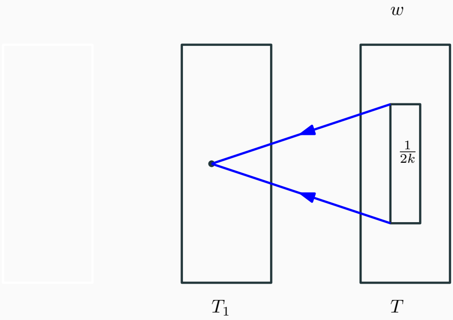
Preuve

Lemme
Soit T un tournoi qui est l'union de k ordres partiels, il existe une distribution de probabilité w sur $V(T)$ et une partition $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de $V(T)$ telles que pour tout i et $x \in T_i$, $w(N_i^-[x]) \geq 1/2k$.



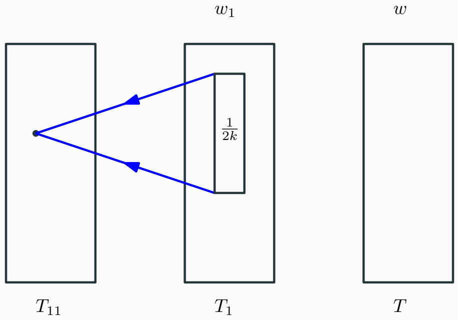
Domination de $T_{1,1}$

$T_{1,1}$, T_1, w et w_1 sont tels que, dans **un ordre partiel** :



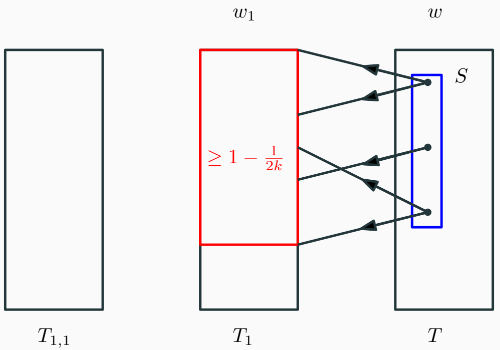
Domination de $T_{1,1}$

$T_{1,1}$, T_1, w et w_1 sont tels que, dans **un ordre partiel** :



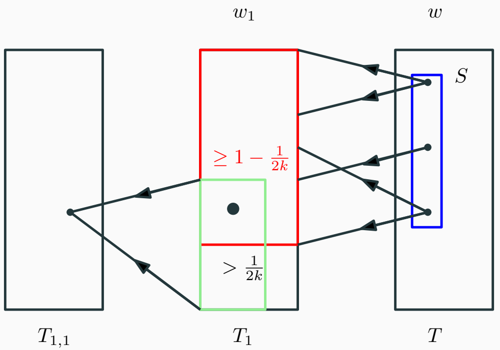
Lemme
$T_{1,1}$ est dominé par un ***nombre fini*** *de sommets de T.*

Application de la transitivité



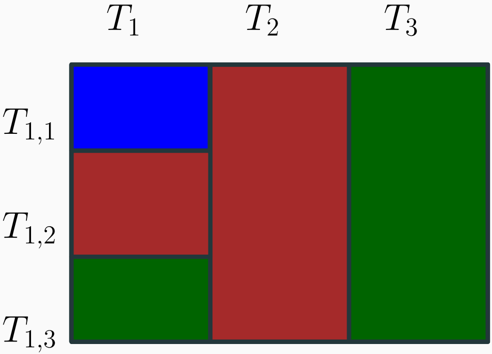
- Soit $S \subset T$ un **ensemble aléatoire** de taille $\log^2(k)$.
- Avec probabilité $1/2$: $w_1(N^+(S)) \geq (1 - \frac{1}{2k})$.
- Par **transitivité**, S domine $T_{1,1}$.

Application de la transitivité



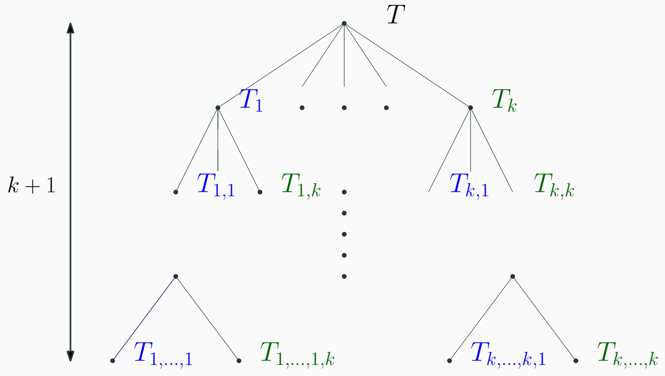
- Soit $S \subset T$ un **ensemble aléatoire** de taille $\log^2(k)$.
- Avec probabilité $1/2$: $w_1(N^+(S)) \geq (1 - \frac{1}{2k})$.
- Par **transitivité**, S domine $T_{1,1}$.

Fin de la preuve



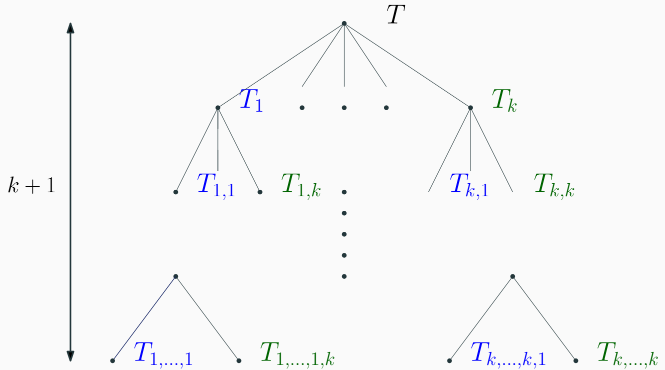
- On peut dominer $T_{1,1}$ avec un nombre fini de sommets.
- Que faire pour $T_{1,2}$?

Fin de la preuve



- Chaque niveau est une partition de $V(T)$.
- Pour chaque $T_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ un ordre apparaît **deux** fois.

Fin de la preuve



- Chaque niveau est une partition de $V(T)$.
- Pour chaque $T_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ un ordre apparaît **deux** fois.
- Au final il suffit de dominer ces k^{k+1} ensembles de sommets

Conclusion

Conjecture (Sands, Sauer et Woodrow)
Tout graphe orienté qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ ensembles indépendants.

- Toujours ouvert pour $k = 3$.

Conclusion

Conjecture (Sands, Sauer et Woodrow)
Tout graphe orienté qui est l'union de k ordres partiels est dominé par $g(k)$ ensembles indépendants.

- Toujours ouvert pour $k = 3$.

Théorème (Harutyunyan et al. 2018)
Pour tout graphe orienté D, $\gamma_f(D) \leq 2\alpha(D)$, où $\alpha(D)$ est la taille du plus grand ensemble indépendant.

- On peut alors montrer $\gamma(D) \leq f(k, \alpha(D))$.