Quelques uns des pROblèmes qui m'intriguent le PLus

András Sebő,
CNRS, G-SCOP, Univ. Grenoble-Alpes

JFRO, 13 Septembre 2021
Journées Franciliennes de
Recherche Opérationnelle

PLan

Introduction: Programmation Linéaire comme nous l'utiliserons

Subject	Conjectures :
1. Arête-coloration,	Goldberg-Seymour, Lovász
2. TSP et (s,t) chemins TSP,	4/3 , 3/2, uniform
3. Bin packing,	Modified rounding (MIRUP)

(- IR (Integer Rounding), ID (Integer Decomp), (Modified) Integer Rounding (MIRUP),
- Integer Caratheodory, Integer Points in simplices
- Hilbert bases property and graph minors ,
- couplage et mineurs …
- chrom. number of perfect graphs, …)

Trois fois la même chose

1. **Moyenne** des nombres a, b, c, d, e pondérés par
156, 7, 845,1678 67 = $\dfrac{156\,a + 7b + 845c + 1678d + 67\,e}{156+7+845+1678+67 \quad (=2753)}$

min (a,b,c,d,e} ≤ moyenne ≤ max {a,b,c,d,e}

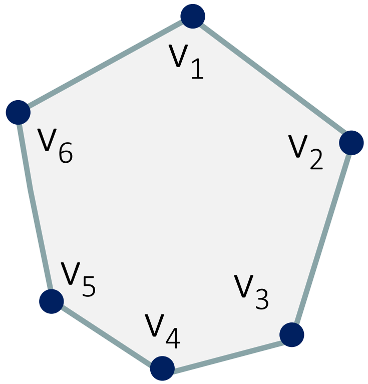
2. **Probabilités**: X variable aléatoire , Pr (X=a) = $\frac{156}{2753}$, etc

min{a,b,c,d,e} ≤ E[X] ≤ max {a,b,c,d,e}

E[X+Y] = E[X] + E[Y] évite des "ΣΣΣ"..., simplifie

3. Fonctions linéaires sur *combinaisons convexes*

$$X = \sum_{v\in\mathcal{V}} \lambda_v v, \quad \sum_{v\in\mathcal{V}} \lambda_v = 1$$



Est-ce du PL ?

$\mathcal{V} \subseteq \mathrm{IR}^n$ grand, donné “efficacement” eg. Couplages, TSP,… d’un graphe . $c \in \mathrm{IR}^n$ définit une function linéaire :

Minimize or maximize $\{ c^T v \ , \ v \in V \}$

Faire ça en exhibant une “bonne moyenne pondérée” de $\mathcal{V}$:

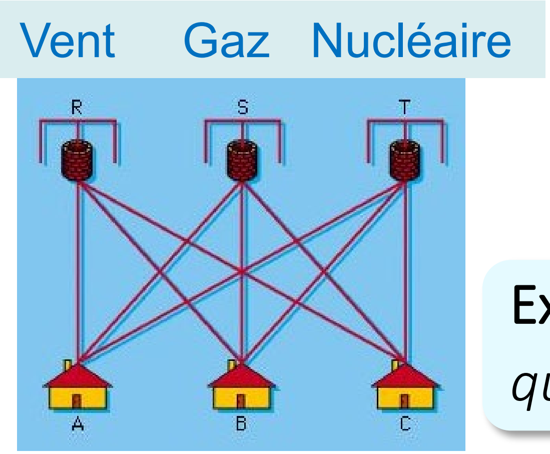
$$x = \sum_{v\in\mathcal{V}} \lambda_v v, \quad \sum_{v\in\mathcal{V}} \lambda_v = 1$$

Il existe toujours, (Motzkin) mais
- le trouver ?
- les pertes

- soit en connaissance explicite des inégalités de l’envelope convexe
- soit en sachant manier l’envelope convexe (eg. séparation)
- soit avec une méthode direct, sur mesure, trouvant x ou des coeffs

PL

1. Moyennes de couplages



couplage : un ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes disjointes

-"- *parfait* : couplage qui couvre tous les sommets

Exercice : *G ce graphe. Il existe un couplage parfait qui coute au plus 1/3 de la somme des coûts*

BIPARTITE MATCHING POLYTOPE:= conv (couplages) , G=(V,E) biparti

$x \in \mathbb{R}^E$ satisfait les inégalités de sommet $\forall\, v \in V$:

$\delta(v)$: ensemble d'arêtes incidentes à v

Notation : $x(\delta(v)) \leq 1$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \,,\; x \geq 0 \;\ldots$$

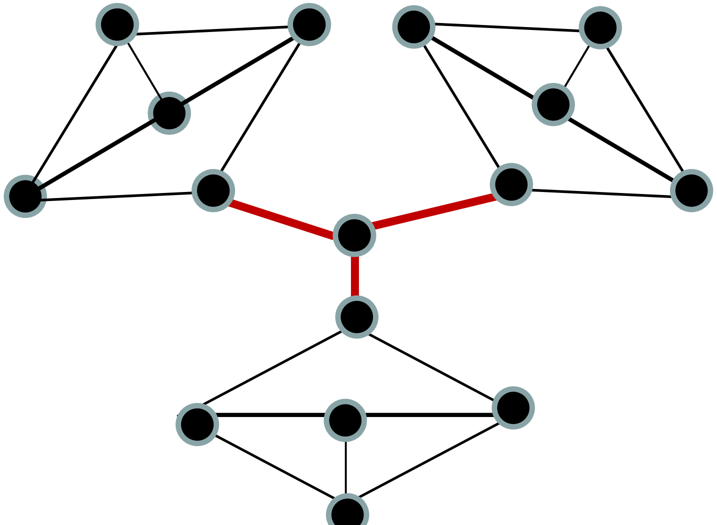
= enveloppe convex de vecteurs d'incidence de couplages

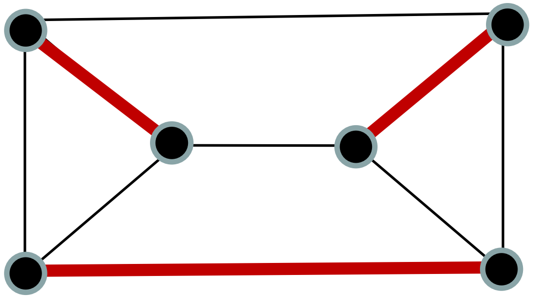
= « moyennes pondérés de couplages »

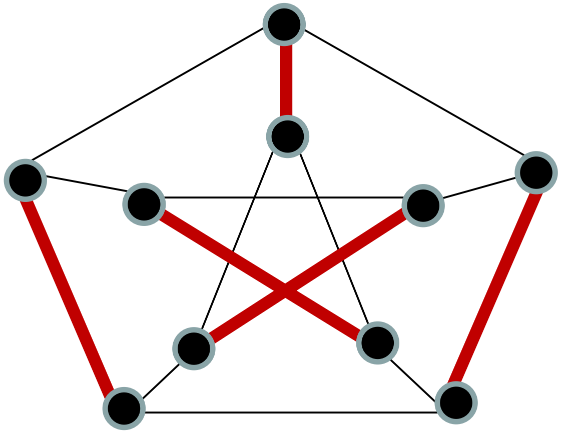
Théorème de Petersen (1891)

A graph est *cubique* si tous ses degrés sont 3.

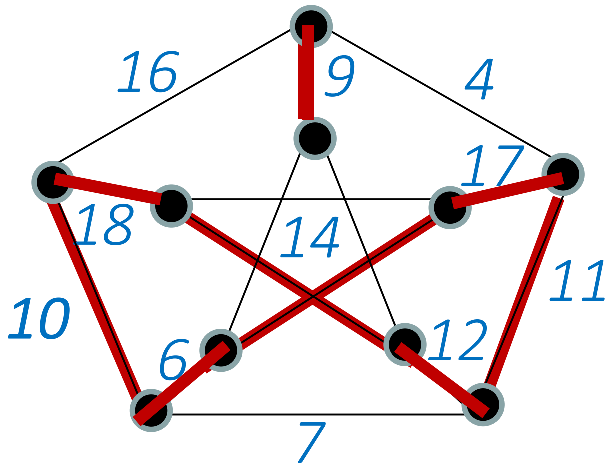
Théorème : G est cubique sans *pont* $\Rightarrow$ G has a p.m.







L'exercice pour les graphes non-bipartis ?



Sans pont, mais ça ne peut pas être partitionné en 3 couplages parfaits.

10 + 9 + 11 + 2x14 = **58** < 1/3 w(E)

(w(E) = 180)

GENERAL MATCHING POLYTOPE (Edmonds) :

$x \geq 0$, $x(\delta(v)) \leq 1$, $x(E(U)) \leq \frac{|U|-1}{2}$ pour tout $U \subseteq V$, $|U|>1$ impair

E(U) is the set of edges with both ends in $U \subseteq V$

couplages parfaits: $x \geq 0$, $x(\delta(v)) = 1$, $x(\delta(U)) \geq 1$ for all $U \subseteq V$, $|U|$ impair

Preuve: $\underline{1}/3 \in$ polytôpe des couplages parfaits

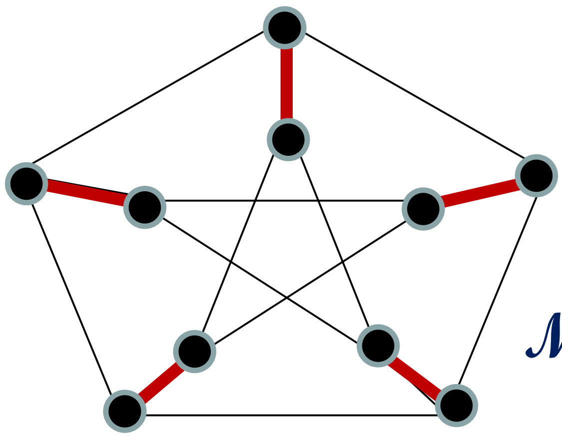
Théorème généralise Petersen: Let G=(V,E) be cubic, bridgeless, w: E → IR on the edges. *Then there exists a p.m. of weight ≥1/3 w(E)*

Pareil pour r-graphes de Seymour r-régulier et $x(\delta(U)) \geq r$ si $|U|$ est impair -> 1/r *w(E).*

Arête-coloration: conjectures

arête-coloration : arêtes incidentes ont des couleurs différentes.

Index chromatique : $\chi'(G)$ = # min de couleurs dans une arête-coloration



⇔ Covering ⇔ Paritition à un nombre min de couplages (pas nécessairement parfaits)

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ ensemble de tous les couplages de G.

Incidence vector of M as edge-set; $\underline{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^E$

$$\chi'(G) := \min \{ \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M : \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M \chi_M = \underline{1}, \quad \lambda_M \in \mathbb{N} \}$$

$$\chi'_{frac}(G) := \min \{ \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M : \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M \chi_M = \underline{1}, \quad \lambda_M \in \mathbb{R}_+ \}$$

Théorème (Vizing 1964) : *Si G est un graphe simple,* $\chi'(G) \leq 1 +$ *degré max de G*

degré max de G $\leq \chi'_{frac}(G) \leq$

Minmax pour la coloration fractionnaire

$\chi'_{frac}(G) := \min\{\sum_{M\in\mathcal{M}} \lambda_M : \sum_{M\in\mathcal{M}} \lambda_M \chi_M = \underline{1},\ \lambda_M \in \mathbb{R}_+\} \leq$

$x(\delta(v)) \leq 1\ \forall\, v\in V,\ x(E(U)) \leq \dfrac{|U|-1}{2}\ \ \forall\, U\subseteq V,\ x\geq 0$

Reformulation: $\chi'_{frac}(G) = \{ \min\ k \ :\ \underline{1}/k \in$ MATCHING POLYTOPE $\}$

$k \geq \underline{1}(\delta(v)) =$ degré de v $\forall\, v\in V$, $\ k \geq \dfrac{\underline{1}(E(U))}{\frac{1}{2}(|U|-1)}\quad \forall\, U\subseteq V,\ |U|>1$

$\chi'_{frac}(G) = \max\{$ degré max, $\max_{U\subseteq V,\ |U|>1} \dfrac{|E(U)|}{\frac{1}{2}(|U|-1)}\ \}$

$\in \mathcal{P}$

GLS 1981

Théorème de « Vizing fractionnaire » : $\leq\ 1 +$ degré max ?

$\dfrac{\underline{1}(E(U))}{\frac{1}{2}(|U|-1)} = \dfrac{2|E(U)|}{|U|-1} \sim \dfrac{2|E(U)|}{|U|} =$ average degree $\leq$ max degree.

Pour les graphes simples $2|E(U)| \leq |U|(|U|-1)$, et donc **OUI !**

The Goldberg-Seymour … *Conjecture* ?

$\lceil \chi'_{frac}(G) \rceil \leq$

Conjecture 1 : (Goldberg 1973, Seymour 1979) $\chi'(G) \leq \lceil \chi'_{frac}(G) \rceil + 1$, and if $\chi'(G) = \lceil \chi'_{frac}(G) \rceil + 1$, then $\chi'_{frac}(G)$ = max degree of G.

Statut intéressant : En 2019, "an alleged proof was announced by Chen, Jing, and Zang " ; *Les arbitres n'ont pas pu aller au bout de la vérification.*

Combinaison entières

$H \subseteq Z^m$ *base Hilbertienne :* si tout vecteur dans leur réseau $\cap$ leur cône est leur combinaison non-négative entière.

Conjecture 2 (Lovász 1987) : Si G ne contient pas de mineur Petersen, alors les couplages parfaits forment une base Hilbertienne. Cad:

Pas nécessairement simple

Pour un r-graphe sans mineur Petersen $\chi'(G) = r$. (Contient le 4-col-thm.)

r-régulier et $|\delta(U)| \geq r$ si $|U|$ est impair

2. TSP et TSP chemins

TSP

INPUT : V villes, c: $V \times V \rightarrow IR_+$ métrique (inégalité triangulaire)

OUTPUT: Le cyle Hamiltonien le plus court

Chemins: s, t

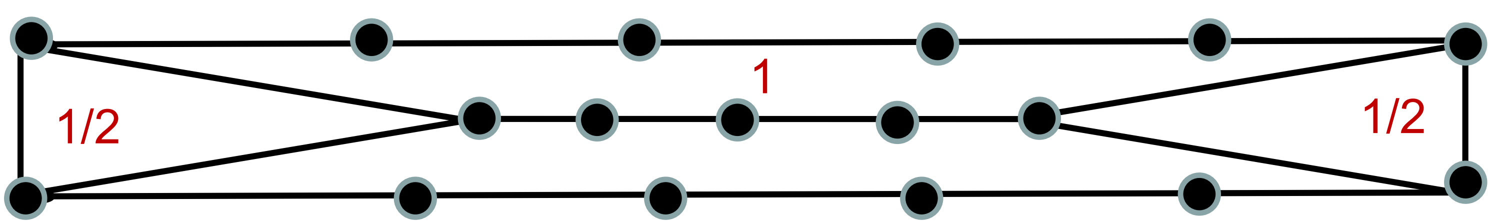
Pour des s,t Chemins Hamiltoniens : ≥ 1 pour les s,t-coupes

Relaxation fractionnaire : *subtour elimination (« Held-Karp »)*

$$LP(G) := \{x \in IR_+^E : x(\delta(W)) \geq 2, \quad \text{pour tout } \emptyset \neq W \subset V\}$$

$\in \mathcal{P}$ avec ellipsoides séparation coupe min

Pas égal à l'enveloppe convexe de cycles Hamiltoniens !

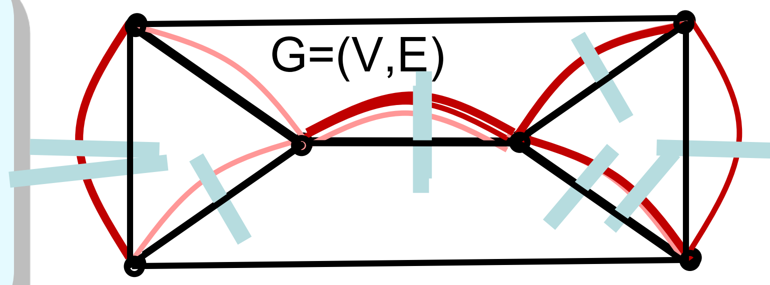


TSP = tour de poids min

Tour : **connexe** sur V

tous les degrés pairs (Eulerien)

sous-graphe de 2E



(s,t) - tours : sauf s et t don't le degré est impair.

w: E $\rightarrow$ IR_+ arbitraire : minimiser le poids d'un tour

Théorème d'Euler et raccourcis → cycle Hamiltonien

Cycle Hamiltonien dans fermeture métr. → tour dans le graphe original

3/2 approximation for the TSP

Ce qu'on trouve $\leq$ 3/2 LP

Theorem(Christofides '76+Wolsey'80, Cunningham'87,Shmoys-Williamson'90)

$G=(V,E)$. If $x \in LP(G)$, alors 3/2 x est dans l'enveloppe convexe des tours.

$LP(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^E : x(\delta(W)) \geq 2,$ pour tout $\emptyset \neq W \subset V\}$

Preuve : Soit $x \in LP(G)$. Par la connaissance de certains polyèdres:

x ~ combinaison convex d'arbres $\rightarrow$ arbre aléatoire F, $E[F]= x$

$x/2$ ~ combinaison convex de «parity-fix subgraphs» J_F, $E[J_F]=x/2$

$$E[F + J_F] = E[F] + E[J_F] = x + x/2 = 3/2\ x$$

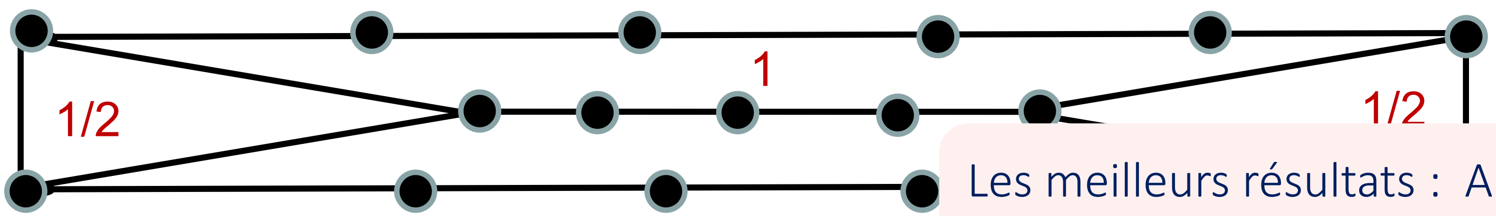
Progrès 2020-2021: $3/2-\varepsilon$, with $\varepsilon = 10^{-36}$ (Karlin, Klein, Gharan)

Conjectures

Conjecture 3: (1976) G= (V,E) , x ∈ IR_+ satisfaisant *subtour elimination*

Alors *4/3 x ∈ conv (tours}*

Theorem:(A.S. , Vygen, 2014) Pour les métriques distance, OPT ≤ 7/5 LP



Les meilleurs résultats : Arash Haddadan,Alantha Newman, R.Ravi

Conjecture 4: (A.S. 2015) G= (V,E) 3-arête-connexe. Alors

8/9 ∈ conv (t : t∈ $\{0,1,2\}^E$ est le vecteur d'indicence d'un tour}

Preuve à partir de Conjecture 1: 2/3 *∈ subtour , donc par Conjecture 1 :*

4/3 x 2/3 = 8/9 ∈ conv (tours}

Analogous s,t conjecture

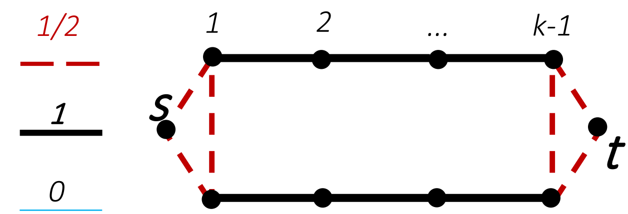
Conjecture 5 : $G=(V,E)$:

$x \in LP(s,t)$, Then

3/2 x ∈ conv (s,t tours}

$OPT_{LP}=n$

$OPT=3/2\ n$



Theorem (A.S. , Anke van Zuylen 2016) Tous les ponts séparent s et t

$\underline{1} \in$ conv (t : t $\in \{0,1,2\}^E$ est le vecteur d'incidentce d'un (s,t)-tour}

Theorem (A.S., Anke van Zuylen 2016) : $x \in P(V,s,t)$,

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{34}\right)x \quad \in \textit{conv (s,t tours\}}$$

2018 : Rico Zenklusen beau 3/2 approximation, ignorant PL;

2019 : Vera Traub, Jens Vygen : Un peu meilleur coeff pour notre alg.

2019 : Rico, Vera, Jens : α-approx for TSP $\Rightarrow \forall\ \alpha' > \alpha$: α'-approx for paths

3. Bin packing – Cutting Stock

Variante Cutting Stock:
$s_1, \dots, s_d$ multiplicités $b_1, \dots, b_d$

BIN PACKING

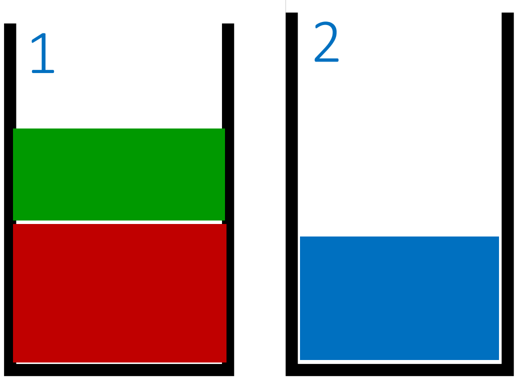
Input : $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq 1$ réels, tailles d'objets,

Tâches : Minimiser le nombre de bins (capacité 1)

Heuristique :	NF,	FF,	FFD
	2	17/10 +1	11/9 OPT +1

Proposition : Σ tailles $\leq$ NF $\leq$ 2 Σ tailles

Preuve :



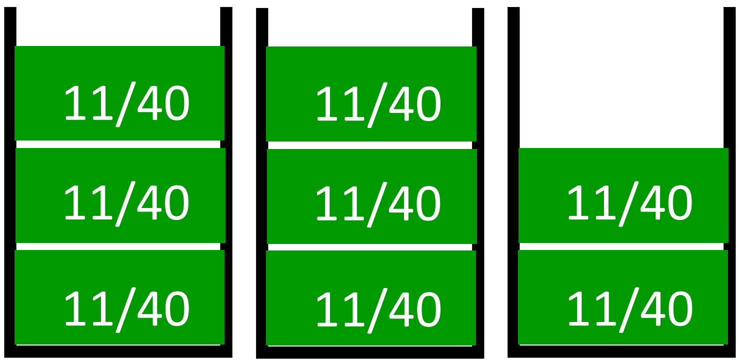
> 1 ...

Pattern Inequalities, LP

pattern : $p \in Z_+^d$, $p \le b$ such that $p_1 s_1 + \ldots + p_d s_d \le 1$

pattern inequality : $p_1 x_1 + \ldots + p_d x_d \le 1$

$x \in IR_+^d$ satisfying all : modified sizes



$n=d=1$, $s_1=11/40$, $b_1=8$, **OPT= 3**

1 pattern inequality: $3x_1 \le 1$

modified sizes: 1/3, TOTAL = 8/3

Gilmore-Gomory LP of all « pattern inequalities »:

$\in \mathcal{P}$ avec ellipsoides séparation sac à dos

$Px \le 1 \quad (P \in Z_+^{\text{big} \times d})$ $\qquad yP \ge b$

$x \ge 0 \qquad y \ge 0$

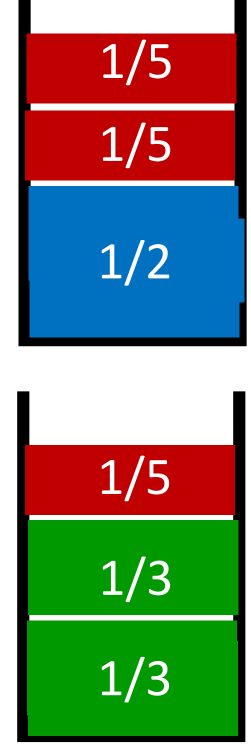
$\max\ b^T x \quad (b \in Z_+^d) \quad = \quad \min y^T 1$

Peut-on espérer qu'il existe toujours un y entier ?

Max of total modified size

Bin packing with fractions of patterns

Examples



Marcotte (1985) : $d=3$ $s=(1/2, 1/3, 1/5)$ $b=(1, 2, 4)$

patterns : (2 0 0), (0 3 0), (0 0 5), (1 1 0), (1 0 2), (0 2 1)

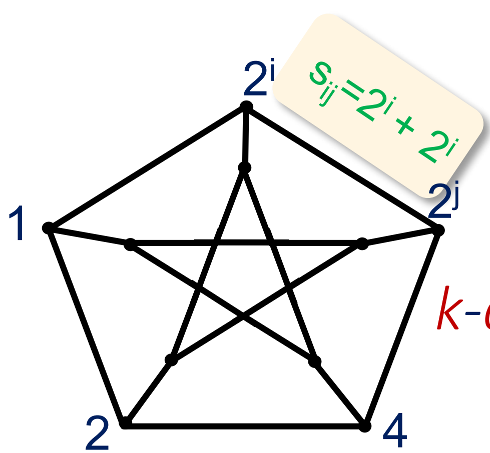
Taille totale = 59/30 LP = ½ + 2/3 + 4/5 = 59/30

OPT= 3

Pour entasser dans 2 bins, notre marge est seulement 1/30, on devrait résoudre $29/30 = 15/30\,x + 10/30\,y + 6/30\,z$, $x, y, z \geq 0$ entiers .

Rizzi (1997) :

Bins : $1+ 2+ \ldots + 2^9$



Convertit les exemples :

k-arête-coloration <-> k bins suffisent

MIRUP Conjecture et Contexte

MIRUP : Modified Integer Round Up

Conjecture 6 : (Scheithauer, Terno, 1997) $\lceil LP \rceil \leq$ **OPT** $= \lceil LP \rceil + 1$

Karmarkar, Karp (1982) : *Erreur additive* $\log^2 d$ (AFPTAS)

Jansen, Solis-Oba (2010) : Si on fix d, OPT + 1 $\in \mathcal{P}$

d=2 & : **OPT =** $\lceil LP \rceil$ by McCormick, Smallwood, Spieksma ('93)

d=3,4,5,6 : MIRUP Scheithauer and Terno ('97)

$d \leq 7$: Lemmes généraux pour MIRUP (A.S., Shmonin '06)

Pour d = 3 $\in$ P ? Pour d = 8 MIRUP ? Relations entre problèmes MIRUP

MeROci pour cette pROsence de ConjecturROs

RO, OC, MP, MD, PL, Graphes,
Modèles, Conjectures, Projets, Théorèmes

David Applegate, Bob Bixby, Vašek Chvátal, Bill Cook:
CPLEX, GUROBI, CONCORDE (TSP)

Bernhard Korte-Jens Vygen: VLSI pour IBM

Lex Schrijver : Chemins de Fer Néerlandais

András Frank: Routage à Télécom et pbs de Chemins disjoints

László Lovász, Katalin Vesztergombi : Médaille de Microsoft

Pour le futur de la RO, entrainement sur des problèmes de maths,
Applications <-> conjectures, mathématiques <-> pratique

Les différents aspects de la RO se renforcent mutuellement !